TRAITEMENT DU SIGNAL et ses APPLICATIONS

Jacky BRESSON – Pr
LP « Génie industriel et Maintenance des Installations »

SOMMAIRE

Définition du traitement du signal et des images – Notion de fréquence

TF 1D de signaux continus

- o Décomposition en série de Fourier (signaux périodiques)
- o Transformée de Fourier (signaux apériodiques)
- o Analyse vibratoire – Analyse Cepstrale
- o Les analyseurs de spectres analogiques
- o Analyse Temps-Fréquence
- o TF à fenêtre glissante
- o Analyse en Ondelettes - Applications

TF 2D (image) de signaux continus

- o Définition
- o Notion de fréquence spatiale
- o Exemples
- o Applications de la TF 2D

Convolution – Réponse impulsionnelle

- o Distribution de Dirac
- o La Convolution – Réponse impulsionnelle
- o Fonction de Transfert et ses applications (électronique, thermique, acoustique,…)

Fonctions de Corrélation

- o Intercorrélation et application
- o Autocorrélation et applications

Annexes

- o TF
- o TF à fenêtre glissante
- o Transformée en Ondelettes

DÉFINITION DU TRAITEMENT DU SIGNAL ET DES IMAGES

Cela correspond à toutes les **méthodes** qui essaient **d'extraire de l'information** à partir d'une observation ou d'une mesure enregistrée. Cela peut être un **signal**, c'est-à-dire une mesure au cours du temps, ou alors une **image**, capture 2D ou 3D d'une observation.

Le traitement du signal et des images est devenu une discipline à part entière, à la croisée de :

- l'électronique,
- l'automatique,
- l'ingénierie de manière générale,
- des sciences-physiques,
- des mathématiques appliquées,
- des statistiques,
- et de l'informatique .

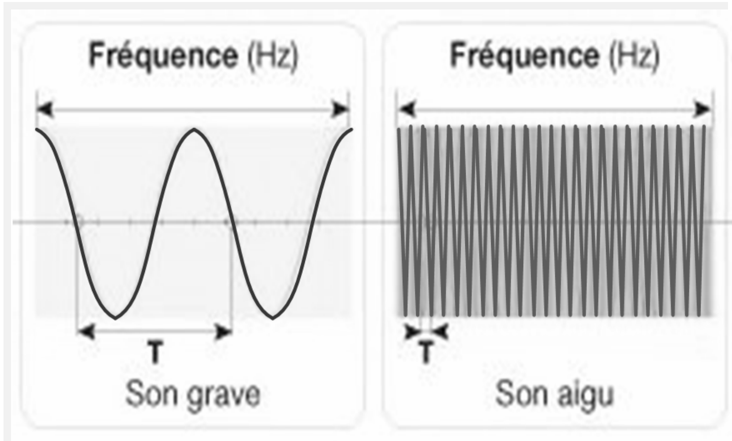
NOTION DE FRÉQUENCE

DEFINITION : La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit pendant une durée déterminée

- C'est donc l'inverse de la période f = 1/T

DANS UN SON

- Sons graves = basses fréquences
- Sons aigus = hautes fréquences
- La fréquence est mesurée en Hertz (= 1/seconde)

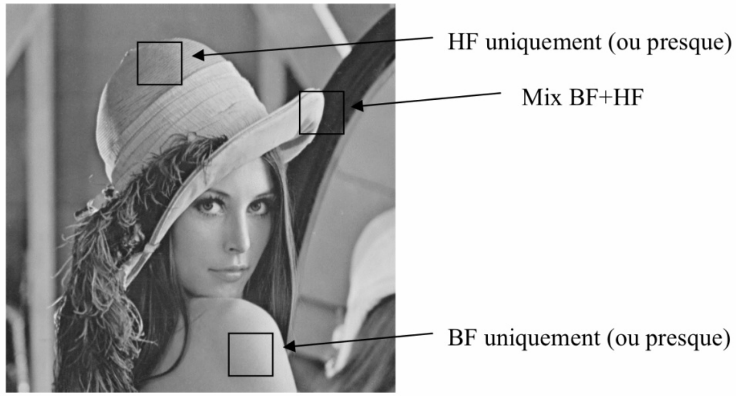


La fréquence permet de caractériser un certain type d'information

NOTION DE FRÉQUENCE

DANS UNE IMAGE

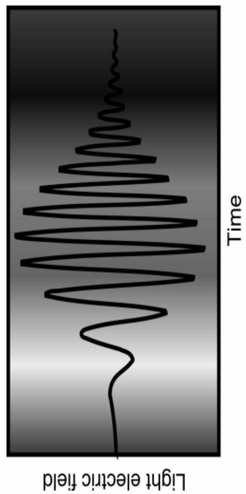
- Surfaces = basses fréquences
- Contours = hautes fréquences
  - La fréquence spatiale est mesurée en 1/distance (=1/m)

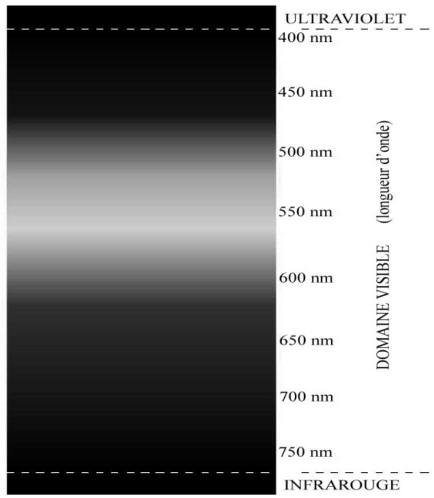


DANS UNE ONDE LUMINEUSE

- Les couleurs dépendent de la longueur d'onde c-à-d de la fréquence

$$\lambda_o = \frac{c}{f}$$





SOMMAIRE

Définition du traitement du signal et des images – Notion de fréquence

TF 1D de signaux continus
- o Décomposition en série de Fourier (signaux périodiques)
- o Transformée de Fourier (signaux apériodiques)
- o Analyse vibratoire – Analyse Cepstrale
- o Les analyseurs de spectres analogiques
- o Analyse Temps-Fréquence
- o TF à fenêtre glissante
- o Analyse en Ondelettes - Applications

TF 2D (image) de signaux continus
- o Définition
- o Notion de fréquence spatiale
- o Exemples
- o Applications de la TF 2D

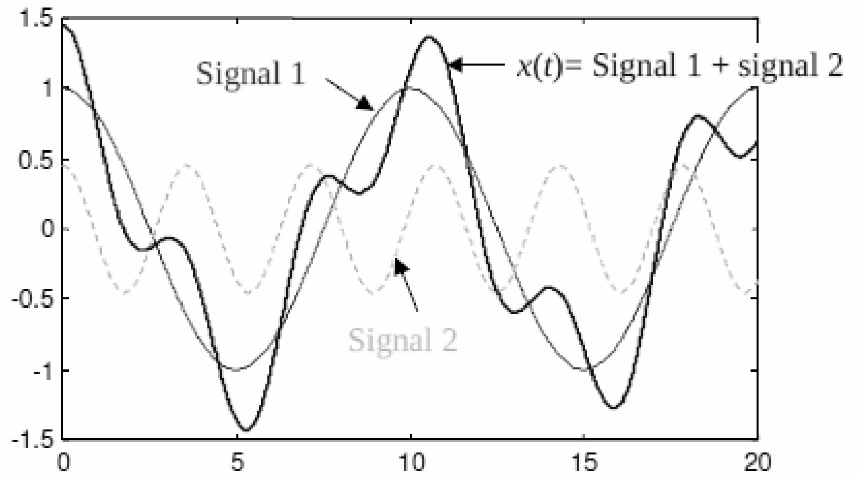
Convolution – Réponse impulsionnelle
- o Distribution de Dirac
- o La Convolution – Réponse impulsionnelle
- o Fonction de Transfert et ses applications (électronique, thermique, acoustique,…)

Fonctions de Corrélation
- o Intercorrélation et application
- o Autocorrélation et applications

Annexes
- o TF
- o TF à fenêtre glissante
- o Transformée en Ondelettes

DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER

- La Décomposition en **Série de Fourrier** consiste à exprimer un signal périodique comme une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux

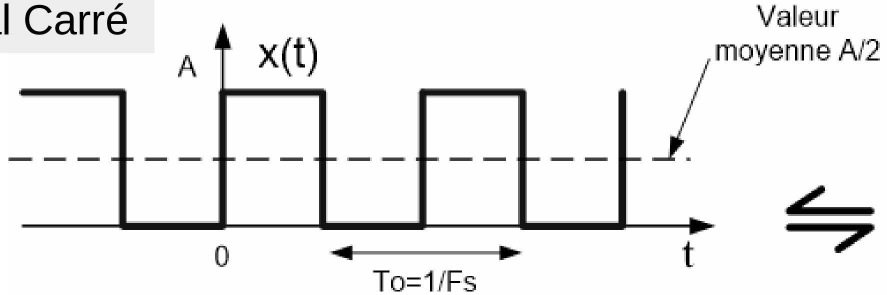


- Pour les signaux **périodiques** → la décomposition en Série de Fourier (**DSF**)
- Pour les signaux **non périodiques** → la Transformée de Fourier (**TF**).

DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER (DSF)

Tout signal x(t) de **période T** répondant à certaines conditions se décompose en une **somme de sinus et de cosinus** : facile à interpréter → **Série de Fourier**

Signal Carré



annexe

ao=0 fonction symétrique/axe temps → *pas de valeur moyenne*
an=0 fonction paire f(x)=f(-x) fonction symétrique/0. → *pas de cos dans la série de Fourier*
bn=0 fonction impaire f(x)=-f(-x) fonction symétrique/0y. → *pas de sin dans la série de Fourier*

DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER (DSF)

DSF DES FONCTIONS PERIODIQUES – Quelques exemples

o**<u>Signal co-sinusoïdal</u>**

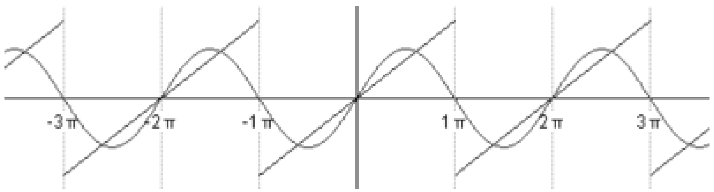
$$x(t) = A\sin\omega t \quad \text{ou} \quad x(t) = A\cos\omega t$$

o**Signal triangulaire**

$$x(t) = -\frac{8B}{\pi^2}(\cos\omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + ...)$$

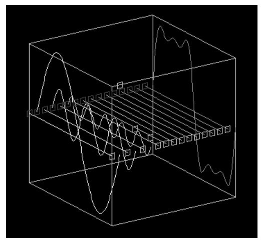
o**Signal rampe**

$$x(t) = \frac{2V}{\pi}(\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t - \frac{1}{4}\sin 4\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t - ......)$$



o**Signal carré**

Exercices



DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER (DSF)

SERIE DE FOURIER COMPLEXE

$$a_n\cos(n\omega_o t)+b_n\sin(n\omega_o t)=a_n\left[\frac{e^{jn\omega_o t}+e^{-jn\omega_o t}}{2}\right]+b_n\left[\frac{e^{jn\omega_o t}-e^{-jn\omega_o t}}{2j}\right]=\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\right)e^{jn\omega_o t}+\left(\frac{a_n+jb_n}{2}\right)e^{-jn\omega_o t}$$

en posant : $X(n\nu_o)=\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\right)$

et si x(t) est réel, alors : $a_n=a_{-n}$ *fonction paire*

$b_n=-b_{-n}$ *fonction impaire*

il vient : $a_n\cos(n\omega_o t)+b_n\sin(n\omega_o t)=X(n\nu_o)e^{jn\omega_o t}+X(-n\nu_o)e^{-jn\omega_o t}$

la fonction x(t) s'écrit alors : $x(t)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}\left[X(n\nu_o)e^{jn\omega_o t}+X(-n\nu_o)e^{-jn\omega_o t}\right]$

il vient : et :

$X(n\nu_o)$ est Transformée de Fourier de x(t) et réciproquement $X(n\nu_o) \rightleftharpoons x(t)$

$$X(n\nu_o)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|X(n\nu_o)\right|e^{-j\varphi(n\nu_o)}$$ $\rightarrow$ **Spectre de fréquence bilatéral** complexe de la fonction x(t)

Les valeurs négatives de n (c-à-d de la fréquence) sont introduites pour simplifier les expressions

Spectre d'une fonction périodique $\Longleftrightarrow$ ***Spectre de raies (discontinu)***

l'écart minimum sur l'axe des fréquences est : $\nu_o=\frac{1}{T}$

DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER (DSF)

SERIE DE FOURIER COMPLEXE

$$\mathrm{X}(\mathrm{n}\nu_o) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| X(n\nu_o) \right| e^{-j\varphi(n\nu_o)}$$

$\rightarrow$ **Spectre de fréquence bilatéral**

Signal Carré

$\rightarrow$ **Dans le spectre de fréquence bilatéral, les amplitudes des raies sont 2 fois plus faibles que dans le spectre unilatéral**

DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER (DSF)

SERIE DE FOURIER

$$x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)\right]$$

$$a_o = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\cos(n\omega_o t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\sin(n\omega_o t)dt$$

SERIE DE FOURIER COMPLEXE

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\nu_o)e^{jn\omega_o t}$$

$$X(n\nu_o) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)e^{-jn\omega_o t}dt$$

Transformation de Fourier des fonctions non périodiques

DSF ➔ Signal périodique (To) ➔ spectre discontinu ($\nu_0 = \dfrac{1}{To}$ **)**

TF ➔ Signal non périodique ($To \to \infty$**) ➔ spectre continu (** $\nu_0 = \dfrac{1}{To} \to 0$ **)**

Si la fonction x(t) remplie les conditions de DIRICHLET alors :

T.F directe :

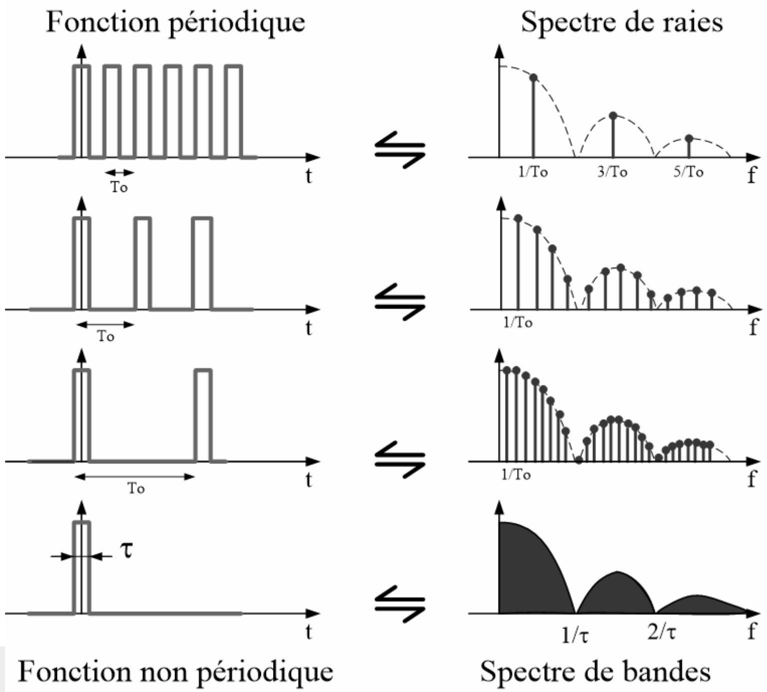
$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi\nu t} dt$$

T. F inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu$$

fonction complexe

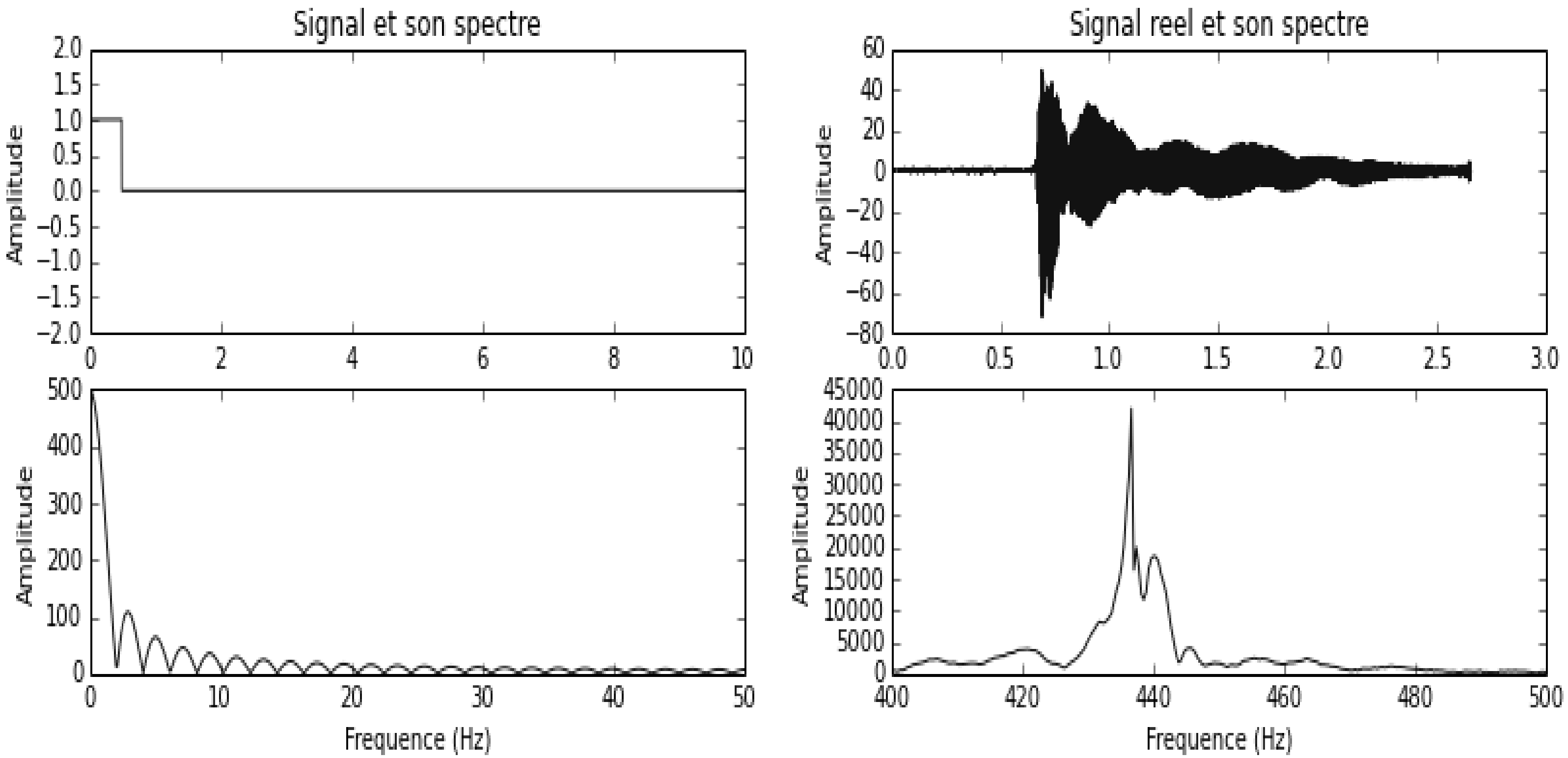
$$x(t) \rightleftharpoons X(\nu)$$



Le spectre d'une fonction non périodique est un spectre continu de la fréquence ou spectre de bandes

Transformation de Fourier des fonctions non périodiques

QUELQUES EXEMPLES



Transformation de Fourier des signaux à temps continu

PROPRIETES DE LA T.F (périodique et apériodique)

- **Linéarité** $a\,x(t) + b\,y(t) \rightleftharpoons a\,X(\nu) + b\,Y(\nu)$
- **Similitude** $x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} X(\frac{\nu}{a})$

  compression dans le domaine temporel
  ⇳
  expansion dans le domaine fréquentiel

- **Translation** (Théorème du retard) $x(t-a) \rightleftharpoons e^{-2j\pi a\nu} X(\nu)$

  - même module que X(ν)
  - rotation de phase de $2\pi\nu a$

  de même : $x(t)\, e^{2j\pi at} \rightleftharpoons X(\nu - a)$

- **Dérivation** $\frac{dx(t)}{dt} \rightleftharpoons 2j\pi\nu X(\nu)$ $\qquad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (2j\pi\nu)^n X(\nu)$

Exercices

- **Intégration** $\int x(t)dt \rightleftharpoons \frac{1}{2j\pi\nu} X(\nu)$
- **Convolution** (Théorème de Plancherel)

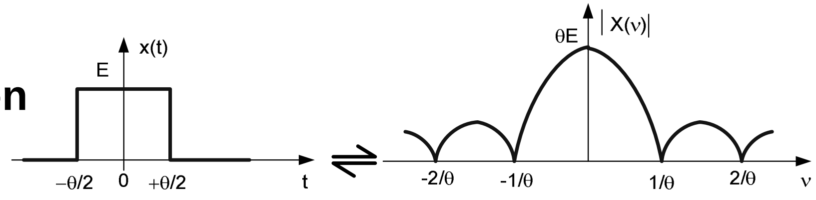
  $e(t) * h(t) \rightleftharpoons E(\upsilon)\,.\,H(\upsilon)$
  $e(t)\,.\,h(t) \rightleftharpoons E(\upsilon) * H(\upsilon)$

Le produit de Convolution dans un domaine ⇔ Produit simple dans l'autre domaine

Transformation de Fourier des signaux à temps continu

QUELQUES ANALOGIES ELECTRIQUE-OPTIQUE-ACOUSTIQUE ……

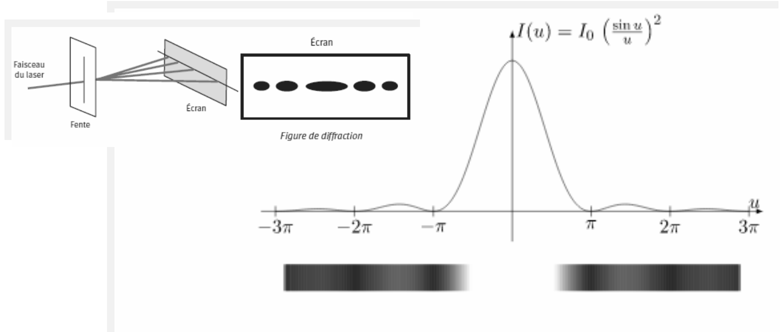
Fonction Porte ou fenêtre d'Observation



$$|X(\nu)| = \theta E \frac{\sin \pi\nu\theta}{\pi\nu\theta}$$

où : θ est la largeur de la fenêtre

Diffraction de la lumière par une fente



Intensité obtenue par diffraction d'un faisceau lumineux au travers d'une fente.

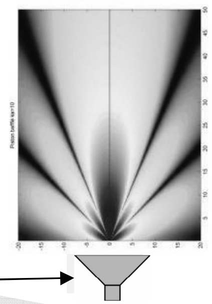
$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \qquad \text{avec} \quad u = \frac{\pi \ell}{\lambda}\sin\theta$$

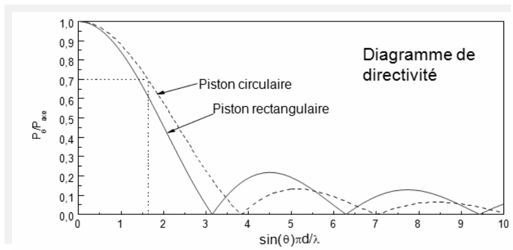
où : ℓ est la largeur de la fente

Directivité d'une source sonore (HP)

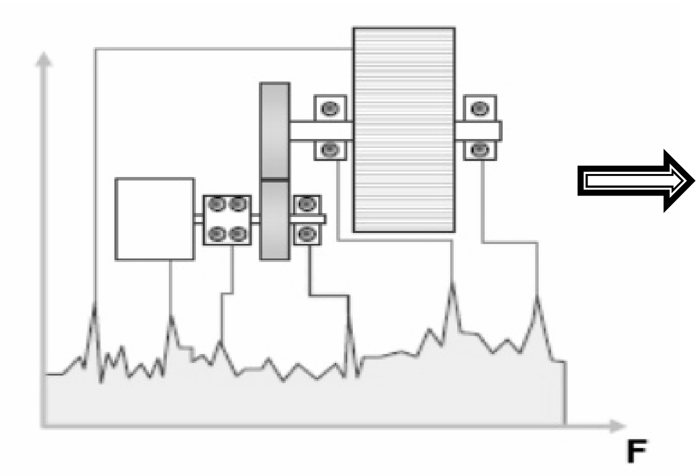
$$p(\theta) = p_{axe}\frac{\sin x}{x} \qquad \text{avec } x = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

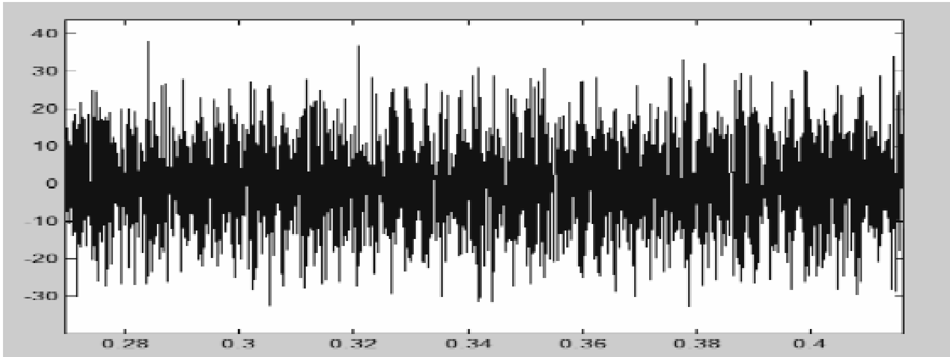
où : d est la largeur de la source sonore





Surveillance Vibratoire en maintenance conditionnelle





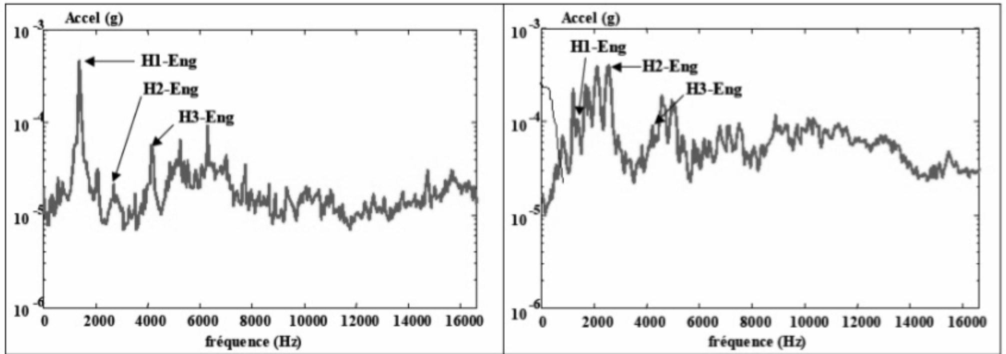
Signal temporel

Basses fréquences (0 à 1000 Hz)

Moyennes fréquences 800 Hz à 3000Hz

Hautes fréquences 2500Hz à 40KHz

- Balourd
- Désalignement
- Excentricité
- Courbure d'arbre
- Fêlure d'arbre
- Jeux mécaniques
- Défauts de paliers
- Frottement de rotor
- Problèmes de moteur électriques
- Défauts de denture
- Défauts de pales de ventilateurs
- Défauts de roulements
- Cavitation



Spectre d'accélération sans défaut sur le palier de mesure

Spectre d'accélération avec défaut de roulement sur le palier de mesure

Spectres SANS et AVEC défauts

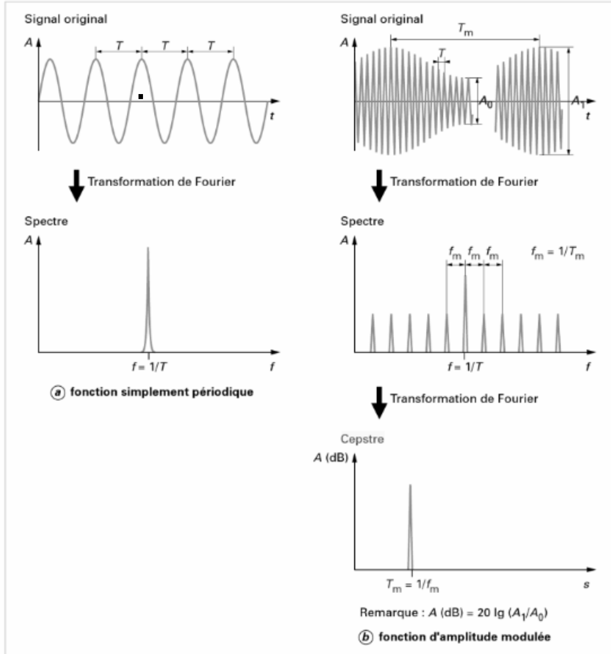
DEFINITION

ANALYSE CEPSTRALE

Le signal temporel x(t) mesuré sur le palier d'une machine tournante est la somme d'une multitude de signaux harmoniques (phénomène tournant) et de chocs (défauts roulements,..). **Ce signal ne permet pas de faire un diagnostic précis du fait de sa complexité.**

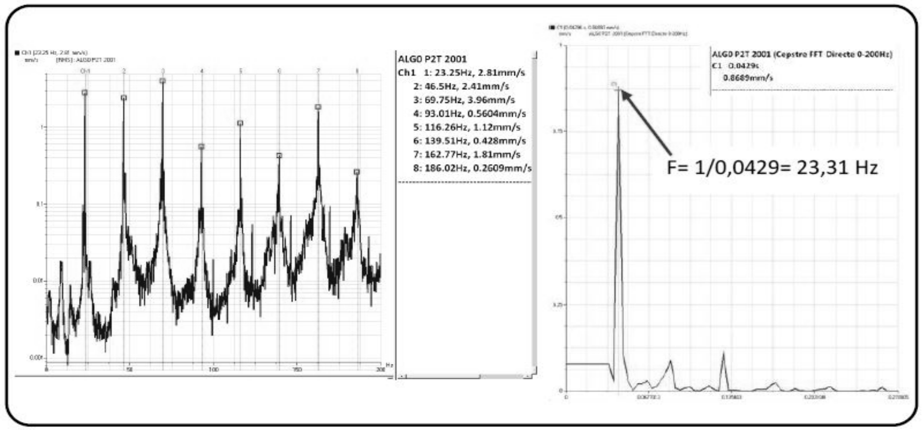
L'utilisation de **l'analyse spectrale** en permettant d'accéder à toute ces **périodicités** rend le **diagnostic plus facile**. Toutefois, chaque défaut crée dans le spectre **une infinité de raies spectrales séparées par la fréquence** d'occurrence du défaut. Rapidement, le spectre lui-même devient indéchiffrable !!!!

A l'instar du spectre qui donne la périodicité du signal temporel, le spectre du spectre devrait donner la périodicité d'apparition des raies ???.



Le **Cepstre : spectre du log du spectre**, est l'outil mathématique qui permet la mise en évidence des périodicités dans un spectre en fréquence.

$$C(\tau) = F^{-1}\left[\log\left(S(f)\right)\right]$$



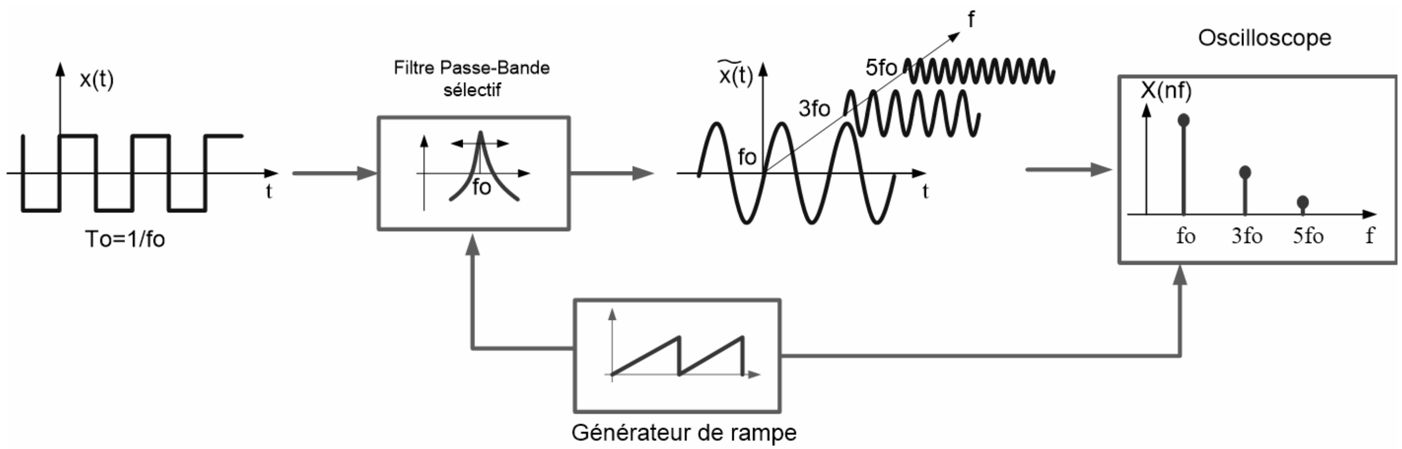
- *Comme Cepstre est l'anagramme de spectre,*
- *La quéfrence (en s) pour la fréquence*
- *Le liftrage pour le filtrage*
- *La saphe pour la phase,*

Les analyseurs de spectres analogiques

Filtrage sélectif

En faisant varier la fréquence centrale fo d'un filtre passe-bande sélectif, on extrait toutes les composantes fréquentielles du signal d'entrée.

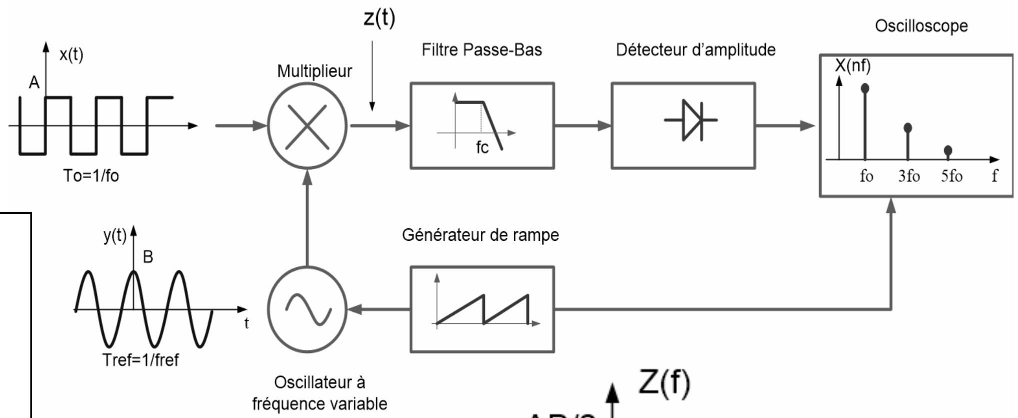
Sélectivité du filtre : $\frac{\Delta f}{fo} = 3\%$

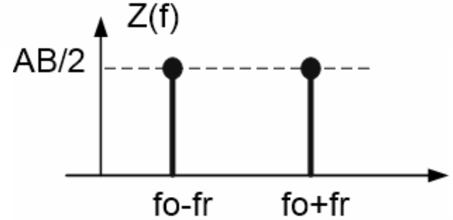


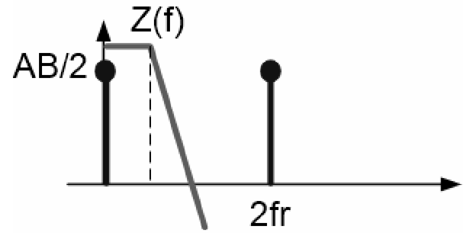
Les analyseurs de spectres analogiques

Détection synchrone

Dans le cas simple où le **signal d’entrée x(t)** (inconnu) est une **sinusoïde**







Après filtrage, il reste une raie à la fréquence 0 ,c-à-d un **signal continu**. Lorsque la sortie « devient continue» on peut en déduire que :

→ fr=fo

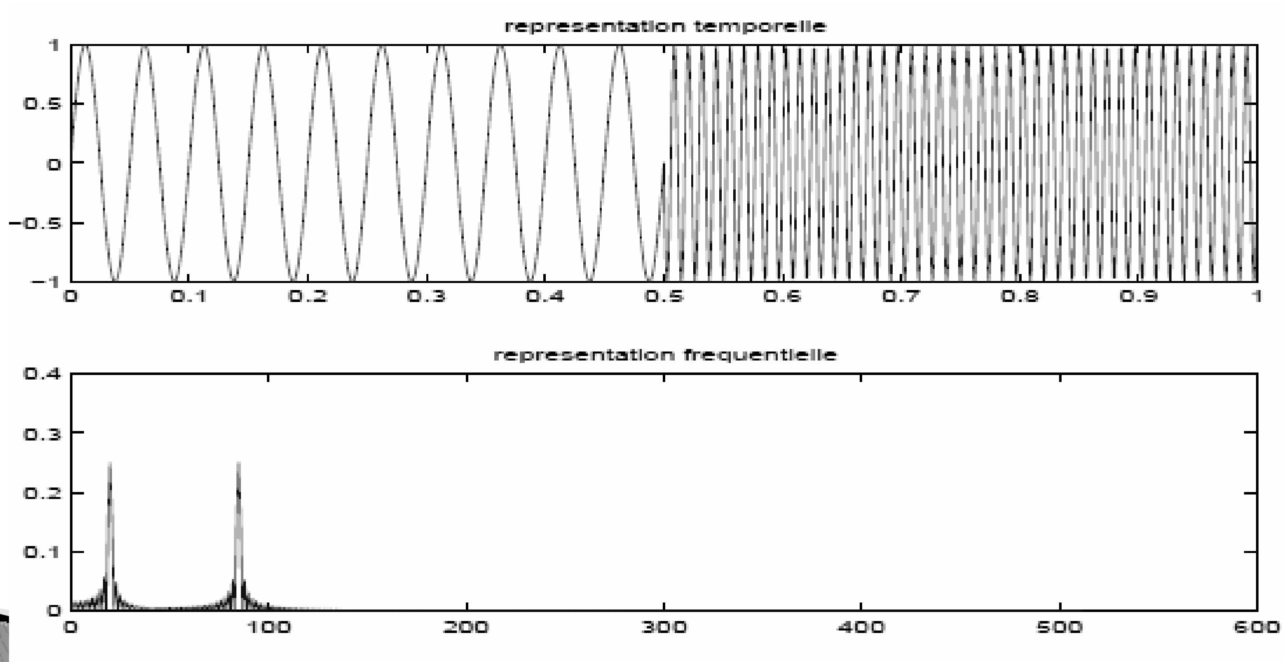
→ AB/2=amplitude de sortie → A

Dans le cas où le **signal d’entrée x(t)** (tjs inconnu) est **quelconque**, la variation de la fréquence fref permet, par **coïncidence** d’extraire toutes les composantes fréquentielles contenues dans le signal inconnu → **spectre**

Analyse Temps-Fréquence

DE FOURIER À L'ANALYSE EN ONDELETTES

Exemple de deux notes de musique jouées l'une après l'autre : l'analyse en fréquence n'informe pas sur la localisation temporelle du changement de régime dans le signal → **Perte de localisation temporelle** .



Analyse Temps-Fréquence

TRANSFORMÉE DE FOURIER À FENÊTRE GLISSANTE

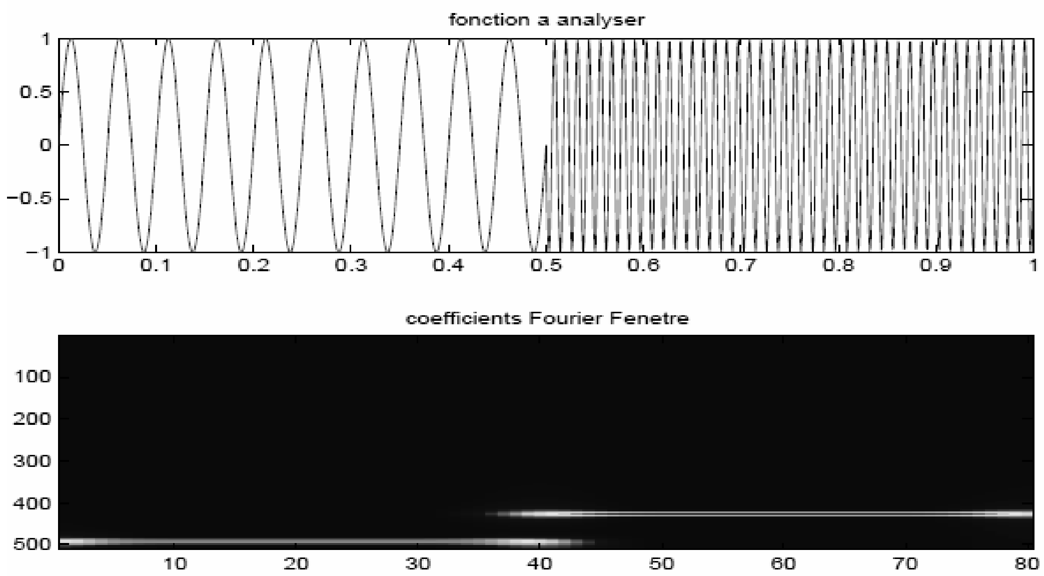
Multiplication du signal f(x) par une **fenêtre glissante h(x−b)** (réelle) et calcul de la transformée de Fourier de ce produit :

$$G(f,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,h(x-b)\,e^{-2j\pi fx}\,dx$$

annexe

b est le temps, f est la fréquence.

Exemple des deux notes de musique *: L'analyse temps-fréquence permet de retrouver à la fois les fréquences (les notes) et l'information temporelle (l'ordre dans lequel elles sont jouées).*

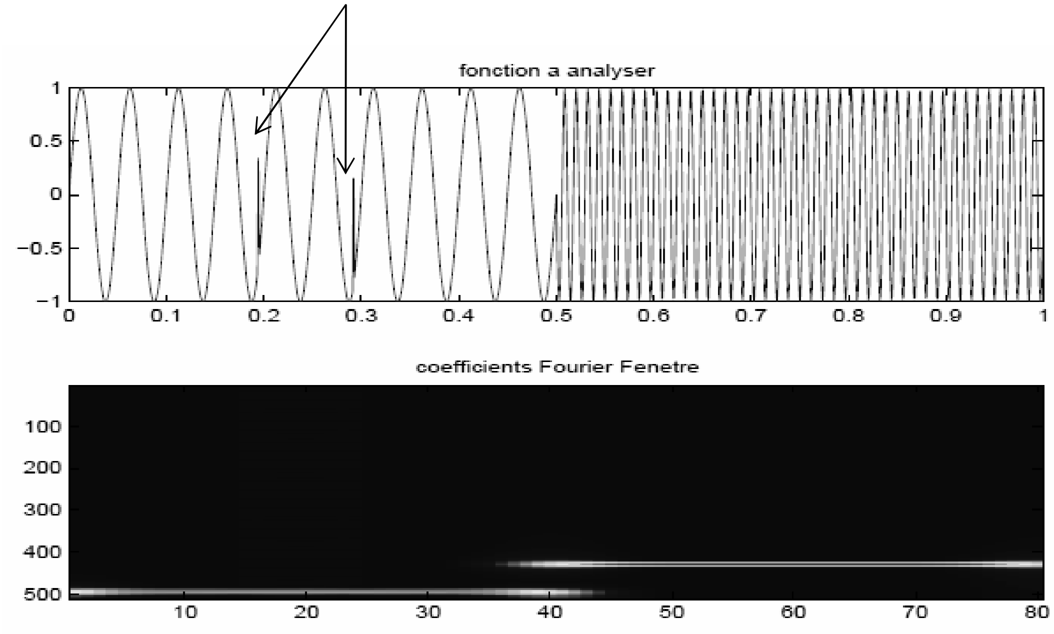


Analyse Temps-Fréquence

LIMITATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER À FENÊTRE GLISSANTE

Signal f2 (deux notes+scratch)

En dessous d'une échelle d'étude, correspondant à la taille de la fenêtre h, la transformée de Fourier à fenêtre glissante ne permet pas de différencier les scratch



ANALYSE EN ONDELETTES

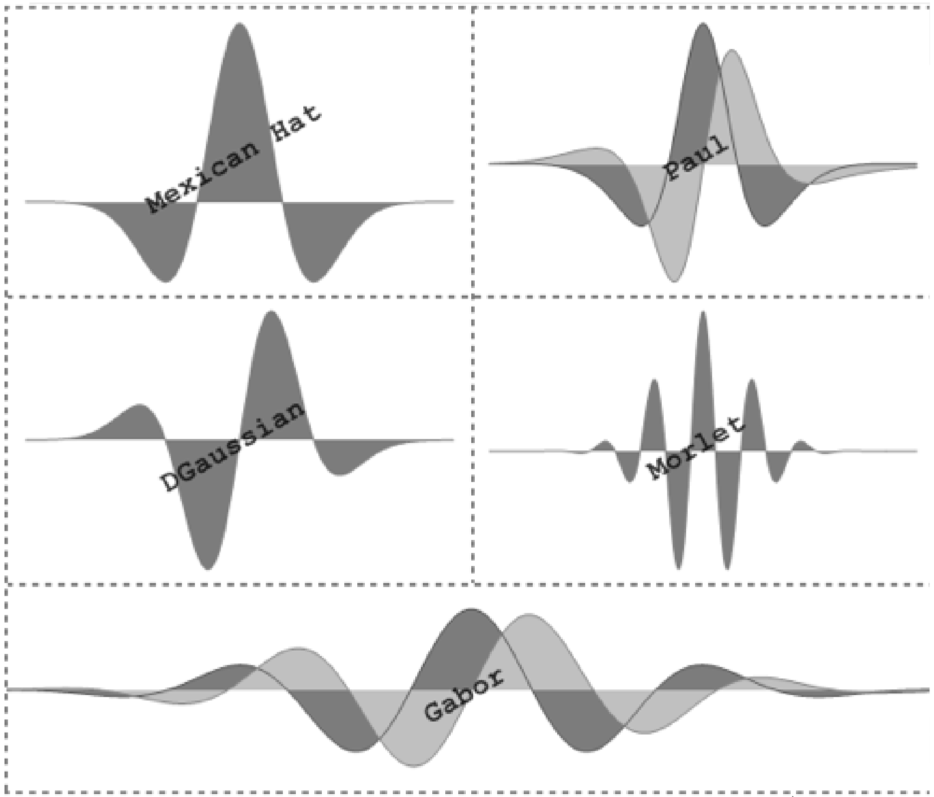
L'analyse en **ondelettes** a pour objectif de rendre compte de ces deux phénomènes simultanément, en introduisant **une fenêtre dont la taille varie avec la fréquence.**

$$W_f(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi_{a,b}(x)\,dx$$

Les fonctions analysantes ou ondelettes sont définies par :

$$\psi_{a,b}(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

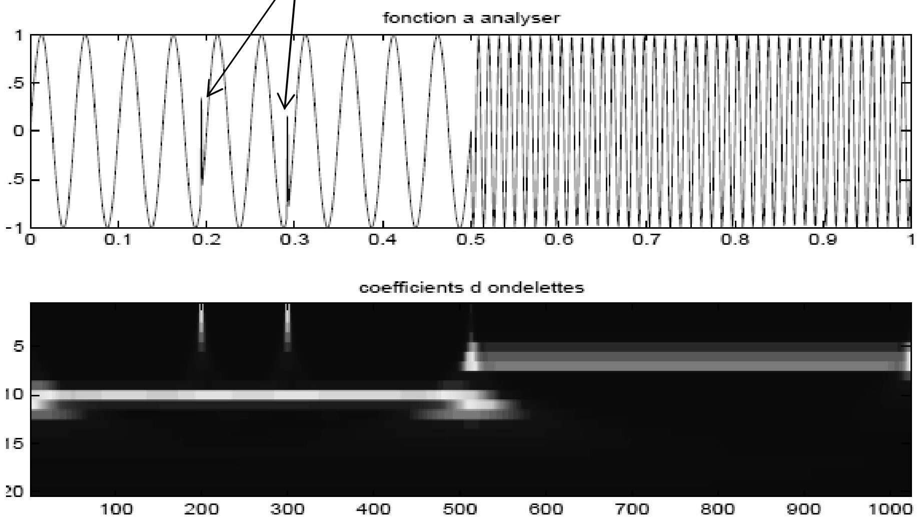
Où : b détermine la position et a donne l'échelle.



annexe

ANALYSE EN ONDELETTES

Signal f2 (deux notes+scratch)

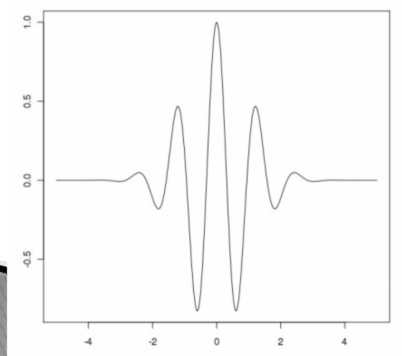


Ondelette de Morlet :

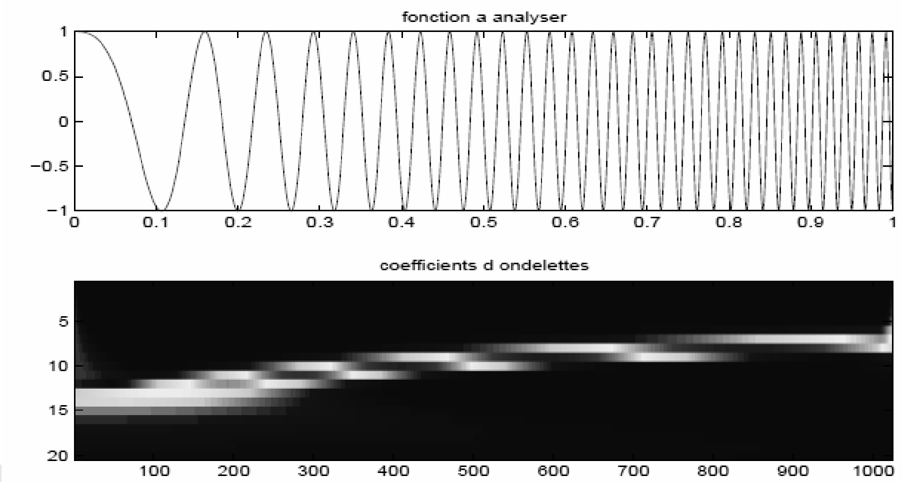
$$\psi_{a,b}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{j\omega_o t}$$

$$\rightarrow \psi_{a,b}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \omega_o t$$

Ondelette de Morlet :



Exemples : l'onde modulée

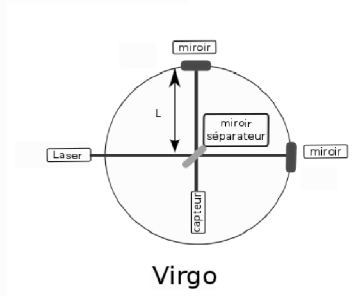


Analyse Temps–Fréquence Application

EN COSMOLOGIE

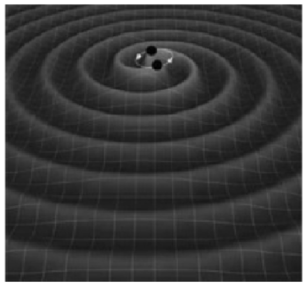
Des chercheurs de l'ENS de Lyon, en traitement du signal, se sont investis dans des expériences qui visent à observer des **ondes gravitationnelles** (projet VIRGO en Italie).

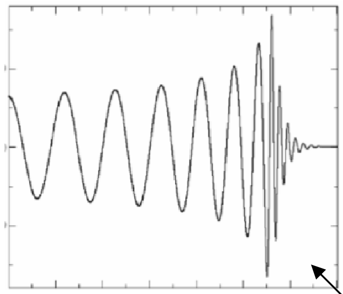
Si deux étoiles tournent l'une autour de l'autre très rapidement , alors dans la phase de coalescence cela va émettre une onde à une fréquence qui va augmenter dans le temps résultat de la génération **d'ondes gravitationnelles.**

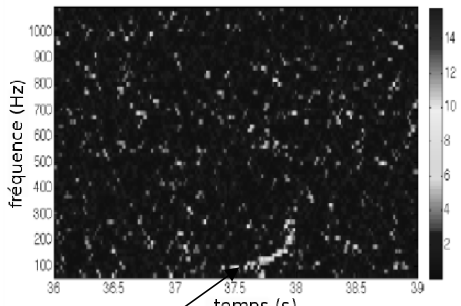


Interféromètre Virgo

Analyse temps-fréquence







chirp : sinus à fréquence locale variable

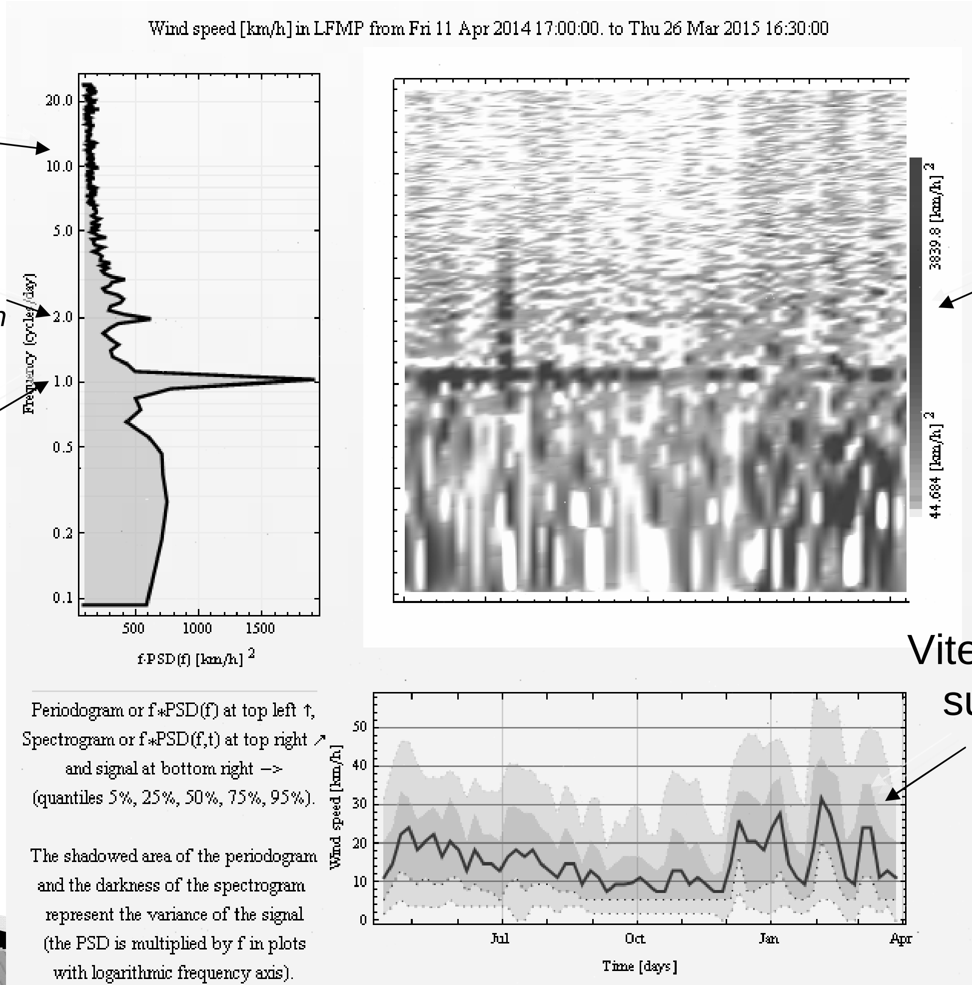
Analyse Temps-Fréquence Application

EN METEOROLOGIE

Périodogramme ou Spectre (cycle/jour)

2 cycles/jour→ jour/nuit et vent de terre et vent marin

1 cycle/jour→ jour/nuit



Représentation temps/fréquence

Vitesse du vent (km/h) sur une année sur le site de Perpignan

SOMMAIRE

Définition du traitement du signal et des images – Notion de fréquence

TF 1D de signaux continus
- o Décomposition en série de Fourier (signaux périodiques)
- o Transformée de Fourier (signaux apériodiques)
- o Analyse vibratoire – Analyse Cepstrale
- o Les analyseurs de spectres analogiques
- o Analyse Temps-Fréquence
- o TF à fenêtre glissante
- o Analyse en Ondelettes - Applications

TF 2D (image) de signaux continus
- o Définition
- o Notion de fréquence spatiale
- o Exemples
- o Applications de la TF 2D

Convolution – Réponse impulsionnelle
- o Distribution de Dirac
- o La Convolution – Réponse impulsionnelle
- o Fonction de Transfert et ses applications (électronique, thermique, acoustique,…)

Fonctions de Corrélation
- o Intercorrélation et application
- o Autocorrélation et applications

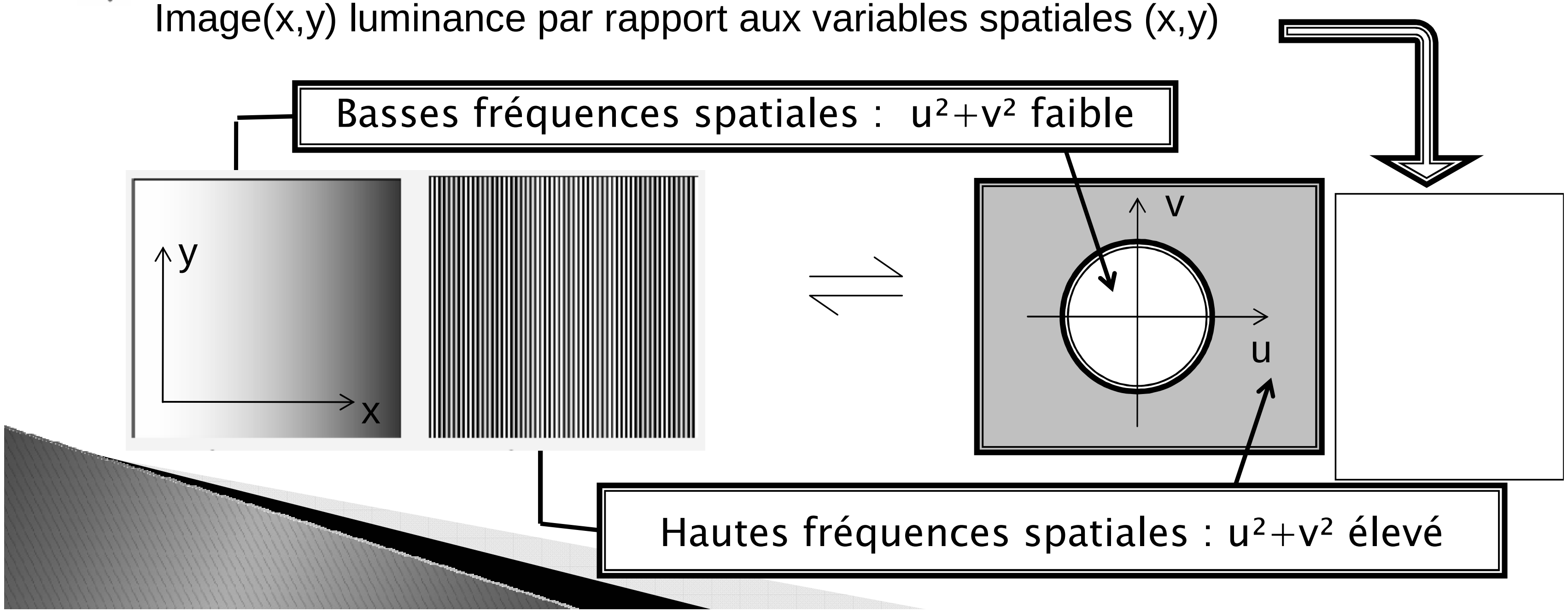
Annexes
- o TF
- o TF à fenêtre glissante
- o Transformée en Ondelettes

Transformée de Fourier d'un signal 2D (image) continu

DÉFINITION :
Si on considère un signal 2D continu f(x,y) alors sa TF F(u,v) s'exprime par :

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, e^{-2j\pi(xu+yv)}\, dxdy$$

NOTION DE FREQUENCE SPATIALE : «Vitesse » de variation du signal Image(x,y) luminance par rapport aux variables spatiales (x,y)



Transformée de Fourier d'un signal 2D (image) continu

PROPRIETES :
Les propriétés de translation, d'échelle et de rotation matricielle sont illustrées dans l'animation ci-dessous

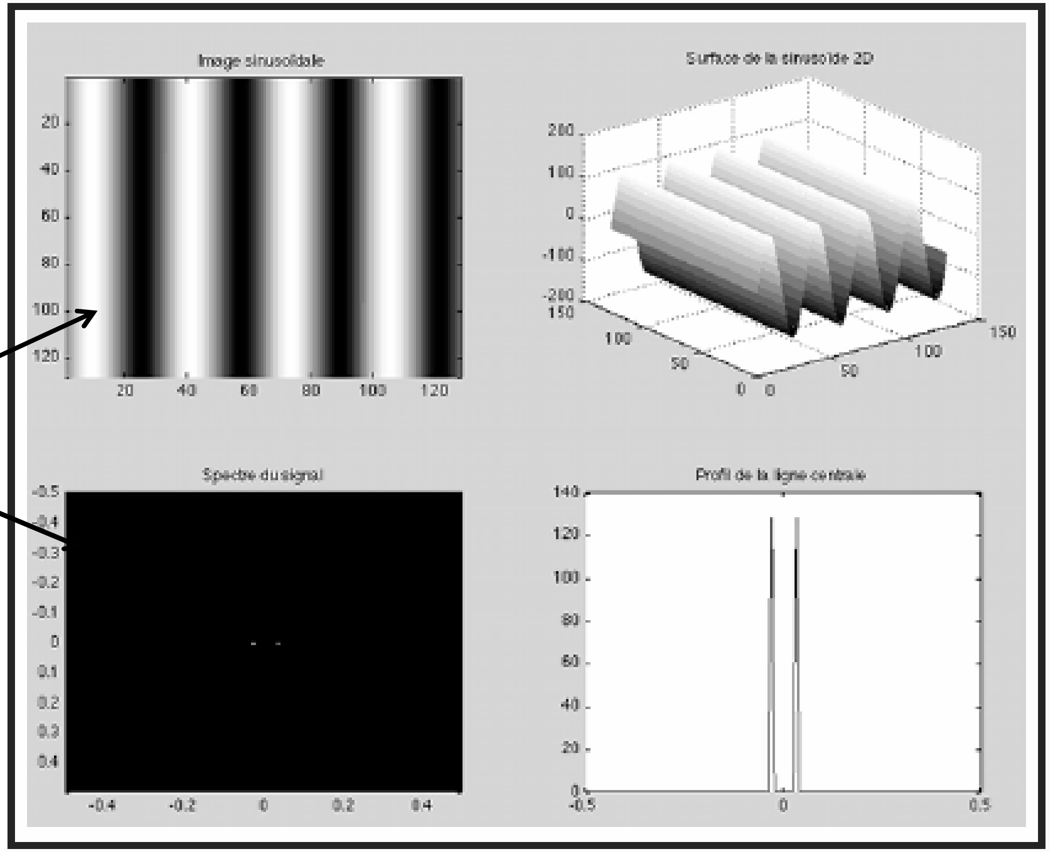
De gauche à droite: spectre de phase, image d'origine, transformée de Fourier

Transformée de Fourier d'un signal 2D (image) continu

EXEMPLE 1 : Fonction sinus

$$f(x,y) = \cos(2\pi f_0 t)$$

$$F(u,v) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



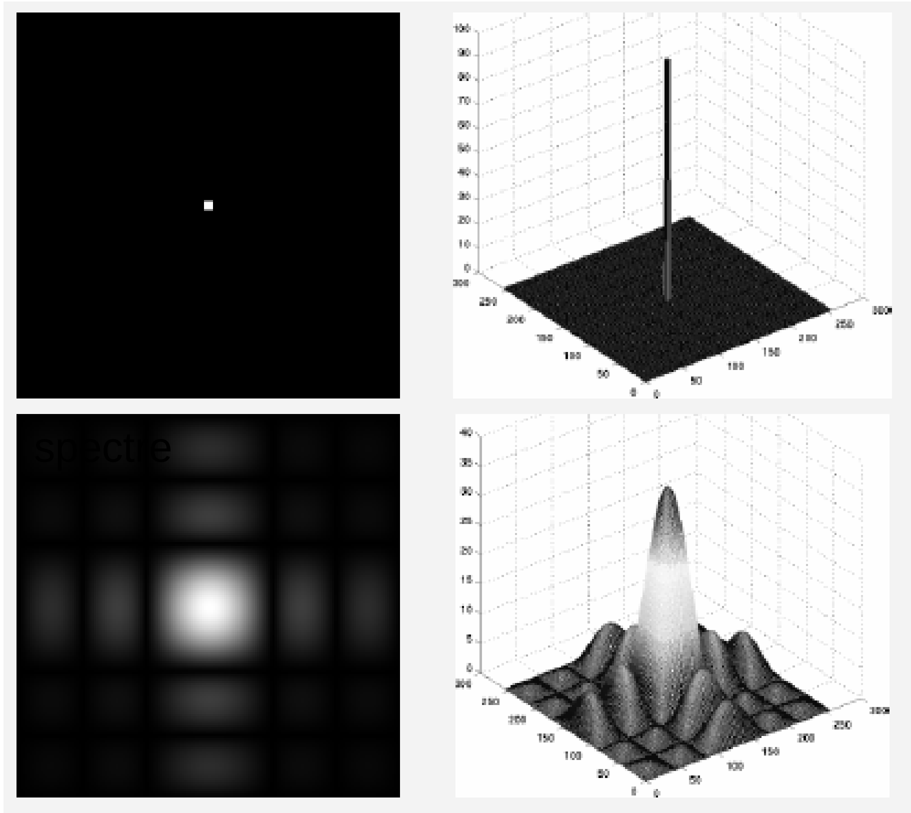
Logiciel Fourier Paint

Transformée de Fourier d'un signal 2D (image) continu

EXEMPLE 2 : Fonction Porte

$$f(x,y) = \mathrm{Rect}\left(\frac{x}{T}\right).\mathrm{Rect}\left(\frac{y}{T}\right)$$

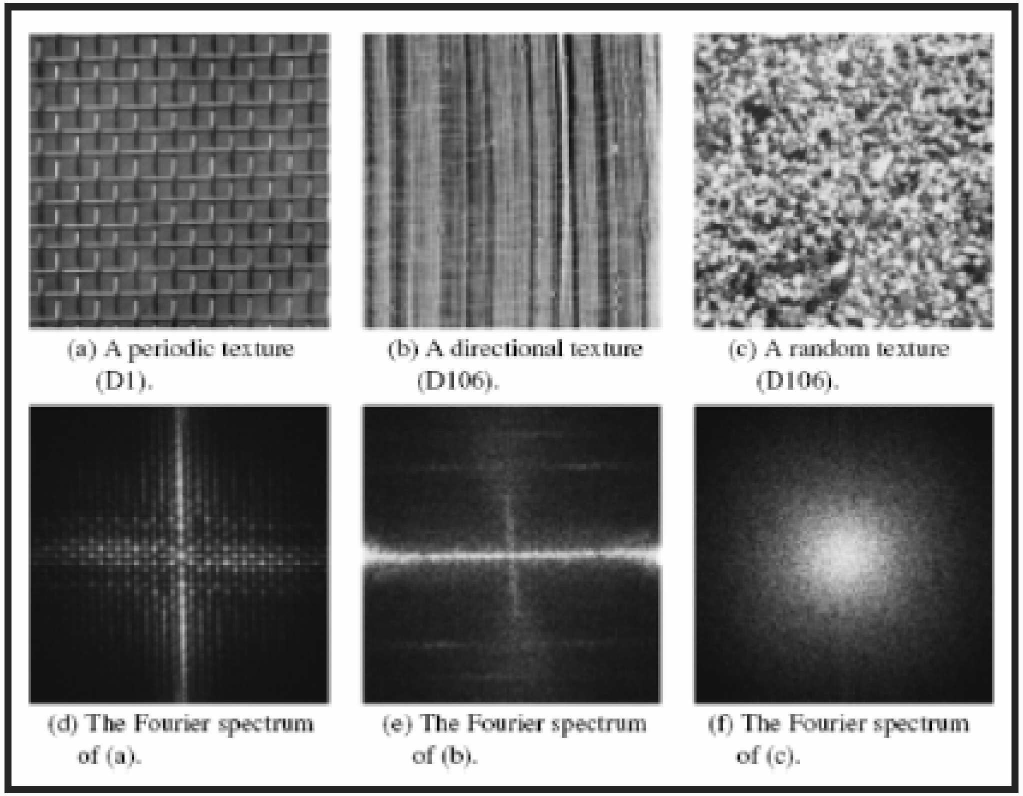
$$F(u,v) = \Delta x.\Delta y \frac{\sin \pi u \Delta x}{\pi u \Delta x}.\frac{\sin \pi v \Delta y}{\pi v \Delta y}$$



Transformée de Fourier d'un signal 2D (image) continu

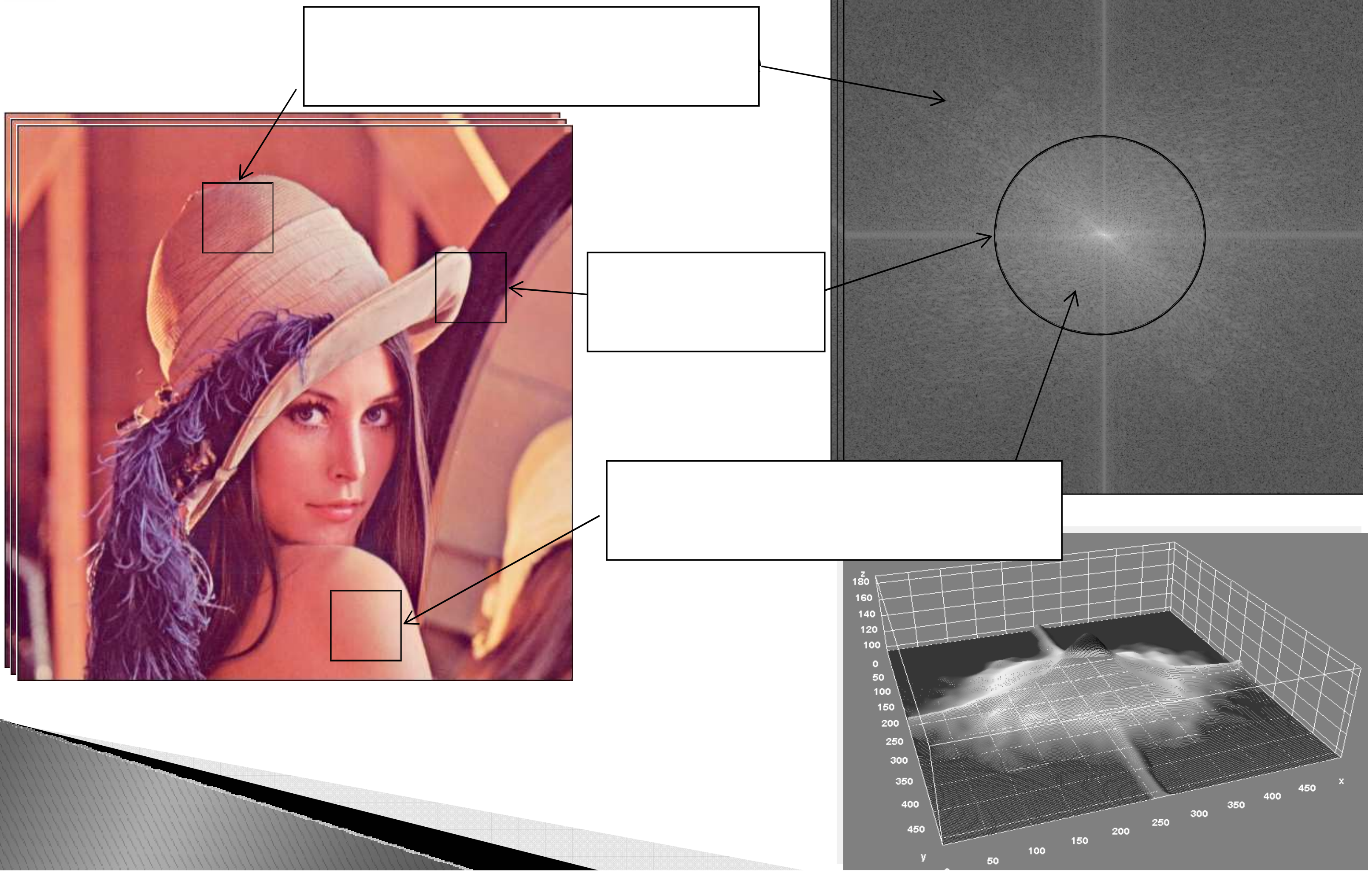
EXEMPLE 3 : Textures

Le spectre 2D donne une information structurelle sur la direction des fréquences spatiales



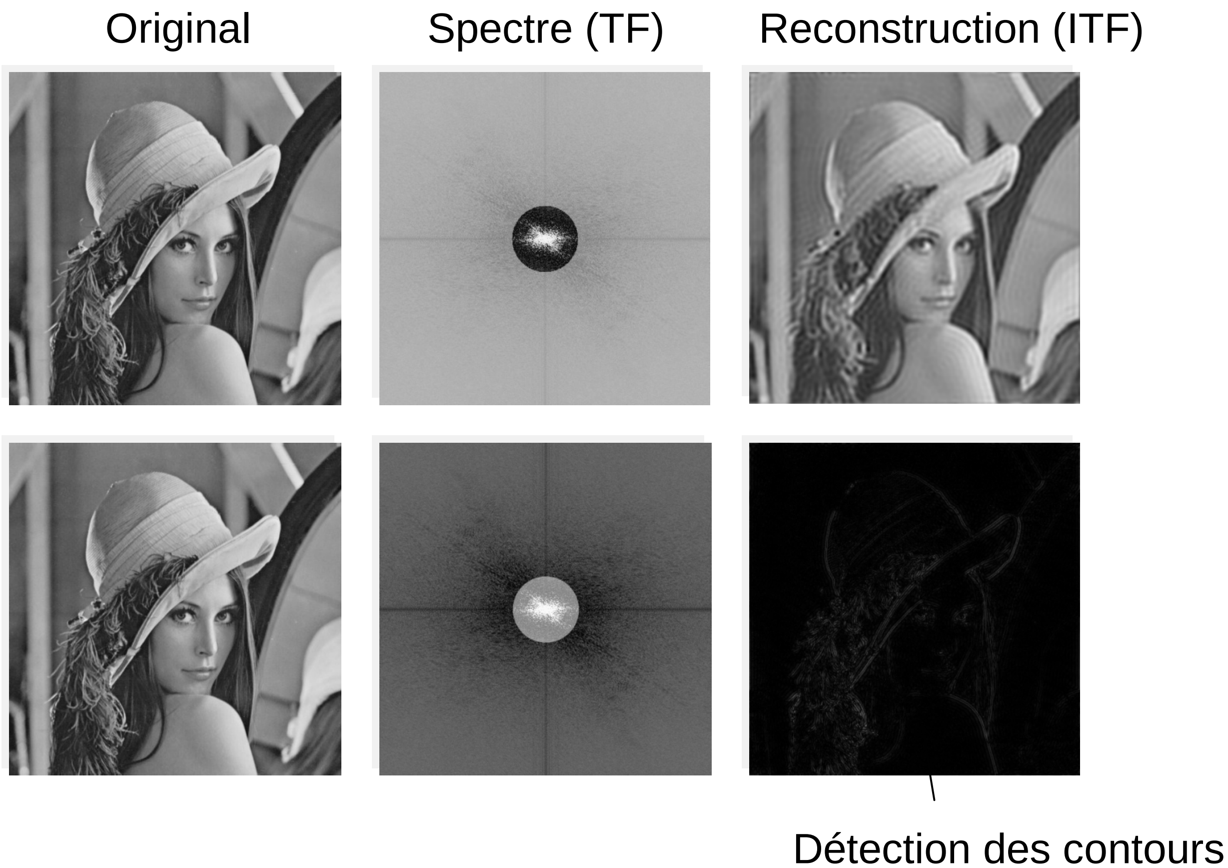
Transformée de Fourier d'un signal 2D (image) continu

EXEMPLE 4 : Image réelle



Applications de la TF 2D continu

FILTRAGE



Applications de la TF 2D continu

DEBRUITAGE

Problème : isoler le signal du bruit

Hypothèse : signal =BF et bruit =HF

Méthodologie du débruitage : éliminer les HF (filtre) de façon à éliminer le bruit.

Image originale — Image bruitée — Image débruitée

Applications de la TF 2D continu

COMPRESSION

<u>Problème</u> : représenter efficacement le signal (peu de composantes)

<u>Hypothèse</u> : HF : énergie négligeable

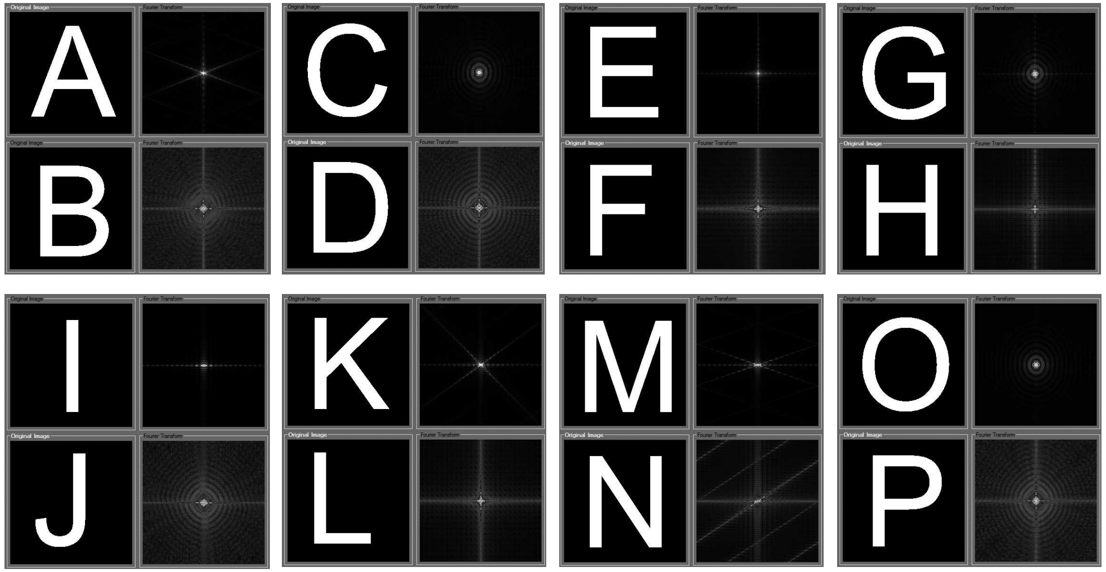
<u>Méthodologie</u> : ne conserver que les BF.

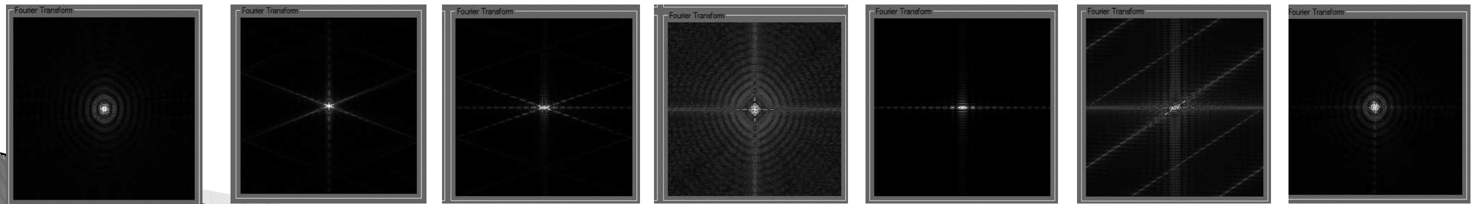
Image brute Image compressée (/2)

$\Rightarrow$ Idée à la base de la norme JPEG, voir TME 4

Applications de la TF 2D continu

AMUSONS-NOUS ! Mémoriser les spectres des 16 premières lettres de l'alphabet, puis retrouver le mot constitué de 7 lettres.





Résultat :

En résumé

la TF permet de retrouver,
si elles existent,
les périodicités temporelles (1D)
ou spatiales (2D)

Sommaire

Définition du traitement du signal et des images – Notion de fréquence

TF 1D de signaux continus
- Décomposition en série de Fourier (signaux périodiques)
- Transformée de Fourier (signaux apériodiques)
- Analyse vibratoire – Analyse Cepstrale
- Les analyseurs de spectres analogiques
- Analyse Temps-Fréquence
- TF à fenêtre glissante
- Analyse en Ondelettes - Application

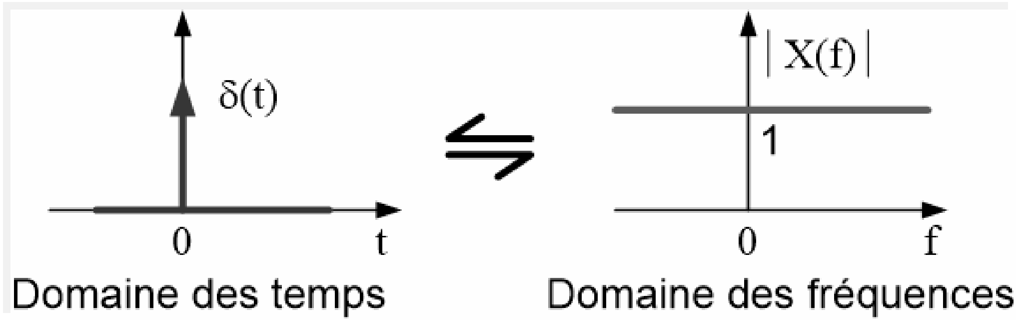
TF 2D (image) de signaux continus
- Définition
- Notion de fréquence spatiale
- Exemples
- Applications de la TF 2D

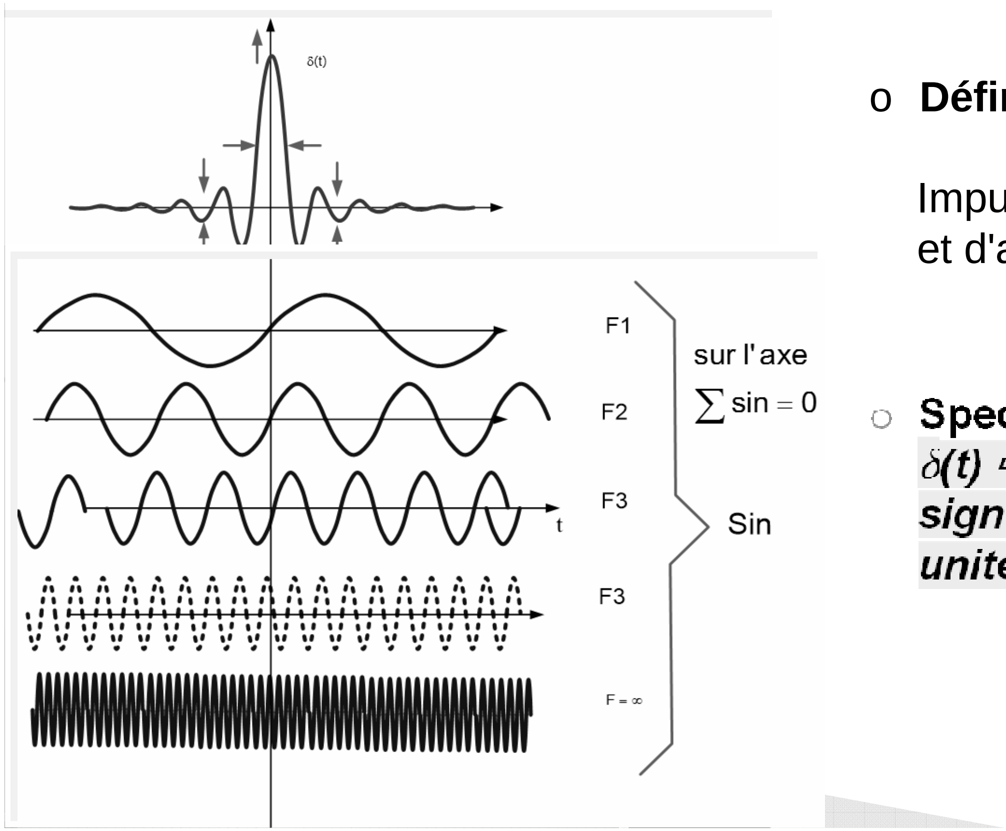
Convolution – Réponse impulsionnelle
- Distribution de Dirac
- La Convolution – Réponse impulsionnelle
- Fonction de Transfert et ses applications (électronique, thermique, acoustique,…)

Fonctions de Corrélation
- Intercorrélation et application
- Autocorrélation et applications

Annexes
- TF
- TF à fenêtre glissante
- Transformée en Ondelettes

Distribution de Dirac





- **Définition de l'impulsion de Dirac δ(t)**

  Impulsion de durée infiniment brève
  et d'amplitude infinie, à t = 0

- **Spectre du Dirac δ(t)**
  δ(t) ⇨ superposition d'une infinité de signaux harmoniques d'amplitude unité.

Convolution

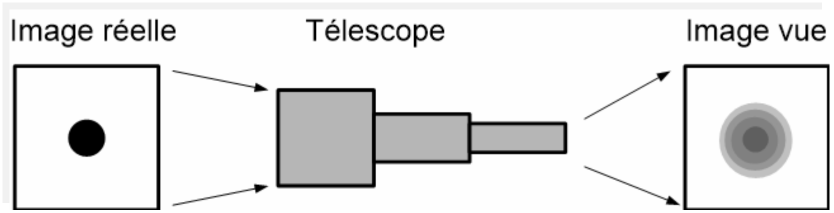
LA CONVOLUTION

- **Définition**

C'est l'effet que produit un instrument de mesure d'un phénomène qui restitue, non pas une image nette, mais une image floue.

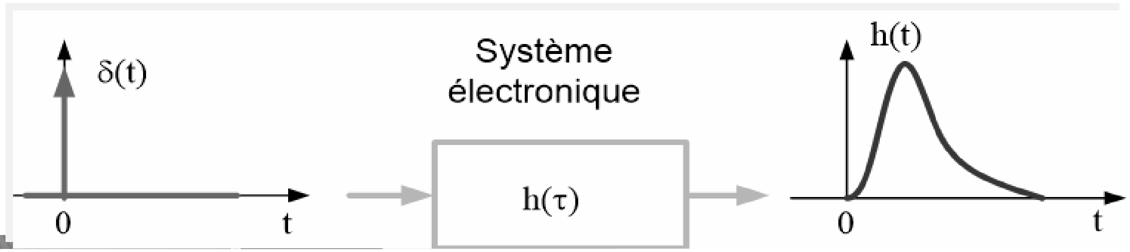
- ***en optique***

un instrument ⇨ une tache et non un point
(2 points rapprochés ne sont vu qu'en fonction du pouvoir séparateur de l'instrument)



- ***en électronique***

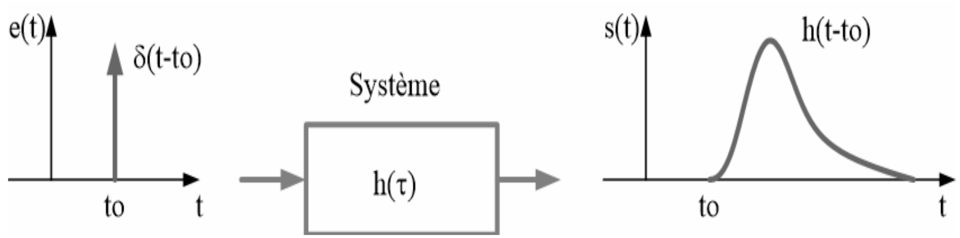
une impulsion infiniment brève ⇨ amplificateur ⇨ un signal de durée finie
(d'autant plus bref que la B.P. est grande)



Réponse impulsionnelle

RÉPONSE IMPULSIONNELLE OU PERCUSIONNELLE h(t) :

A un signal :

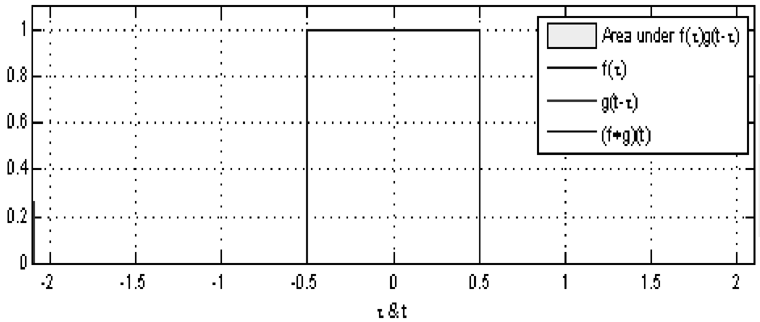


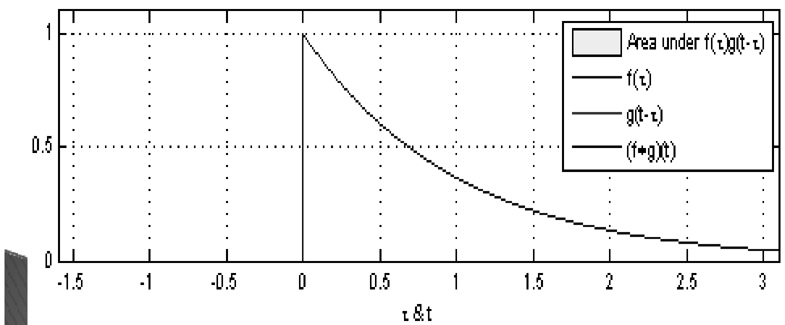
EQUATION DE CONVOLUTION

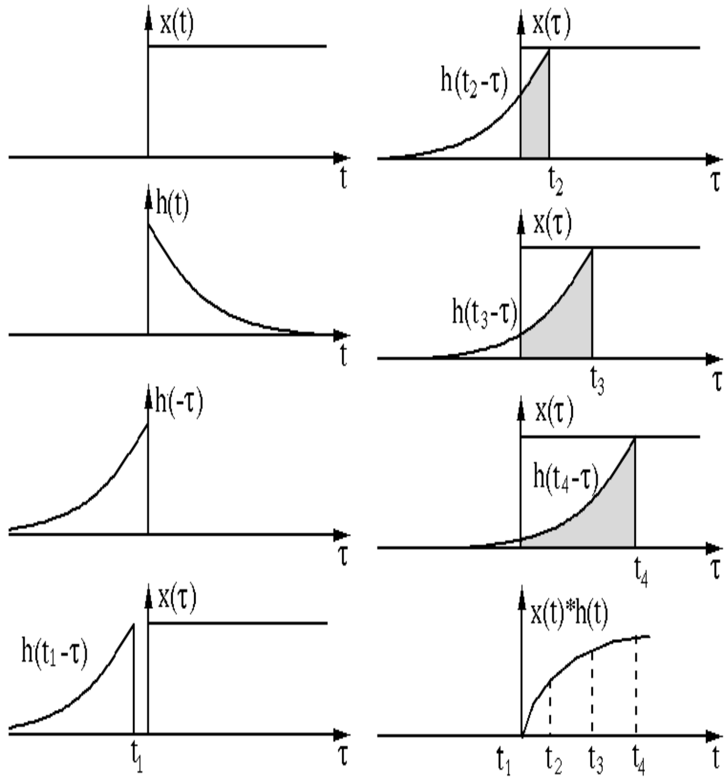
$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow s(t) = e(t) \otimes h(t)$$

Convolution – Réponse impulsionnelle

EXEMPLES DE PRODUIT DE CONVOLUTION – Signaux simples







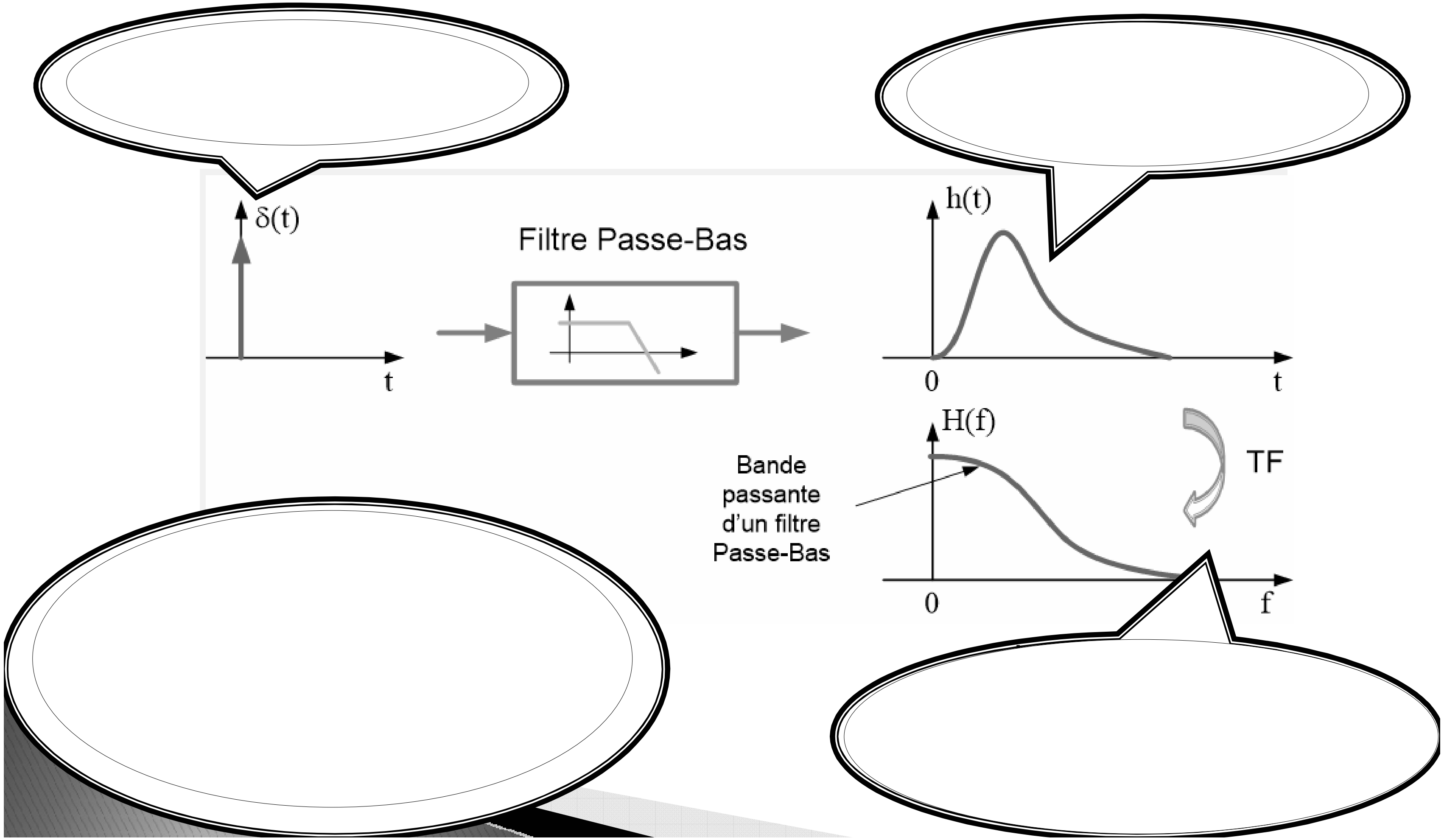
Exercices

Joy of convolution

convolution

Fonction de Transfert – Application

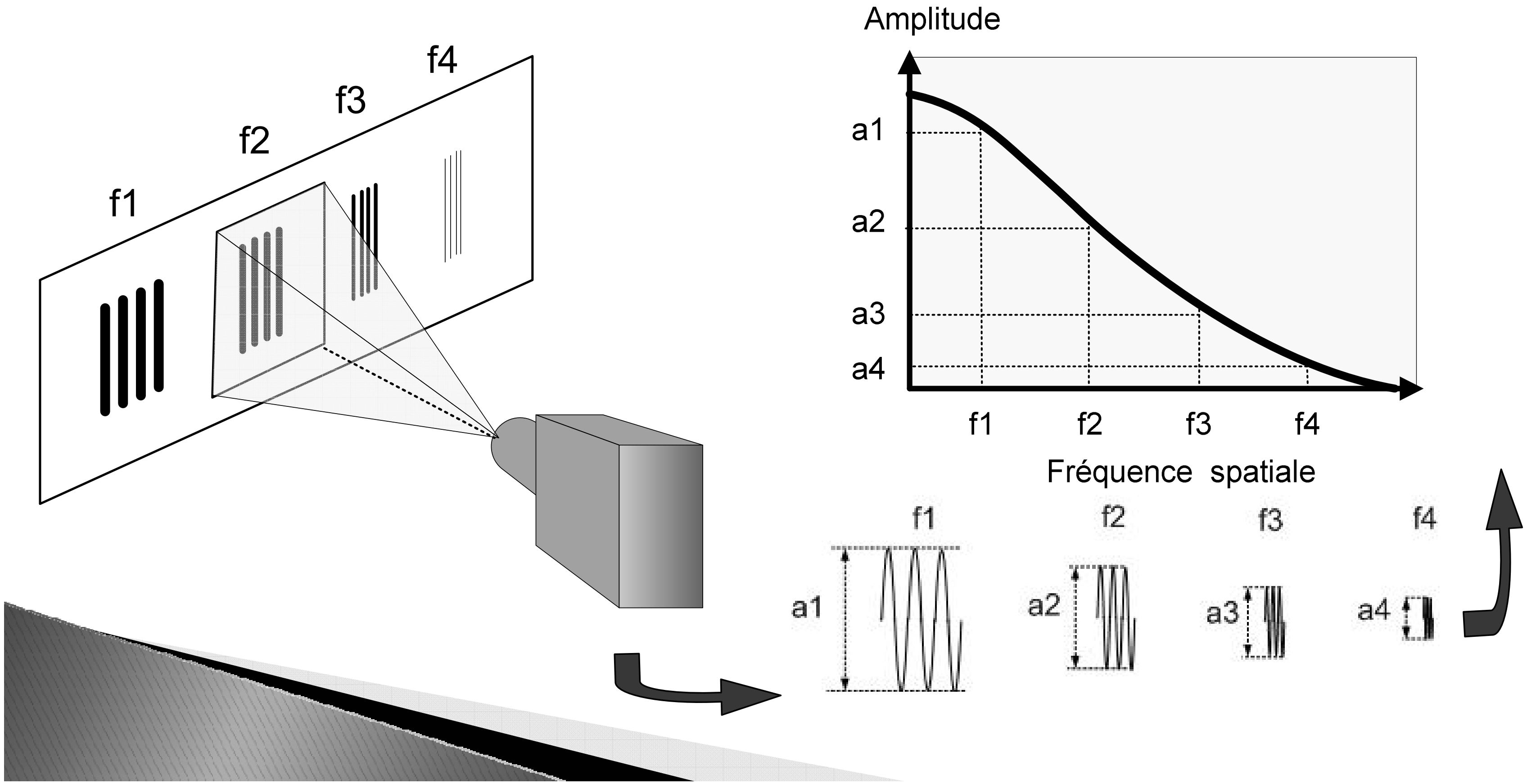
MESURE DE LA BANDE PASSANTE D'UN SYSTÈME ELECTRONIQUE



Fonction de Transfert - Application

MESURE DE LA BANDE PASSANTE D'UNE CAMERA THERMIQUE OU RESOLUTION SPATIALE

Mesure directe de la Fonction de Transfert de Modulation (FTM)

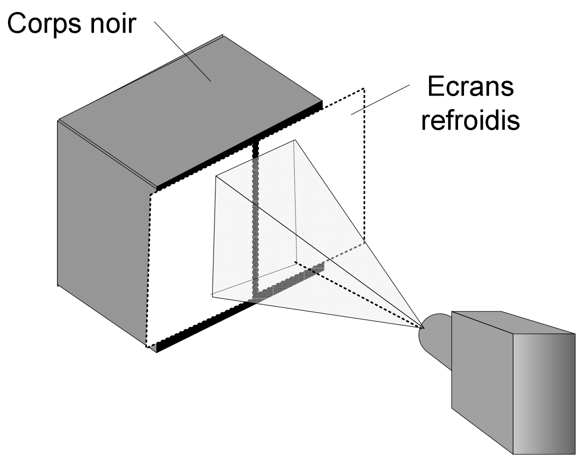


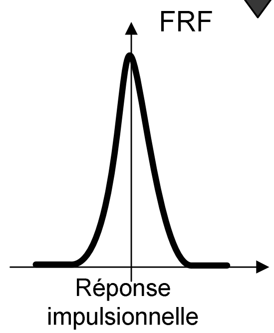
Fonction de Transfert - Application

MESURE DE LA BANDE PASSANTE D'UNE CAMERA THERMIQUE OU RESOLUTION SPATIALE

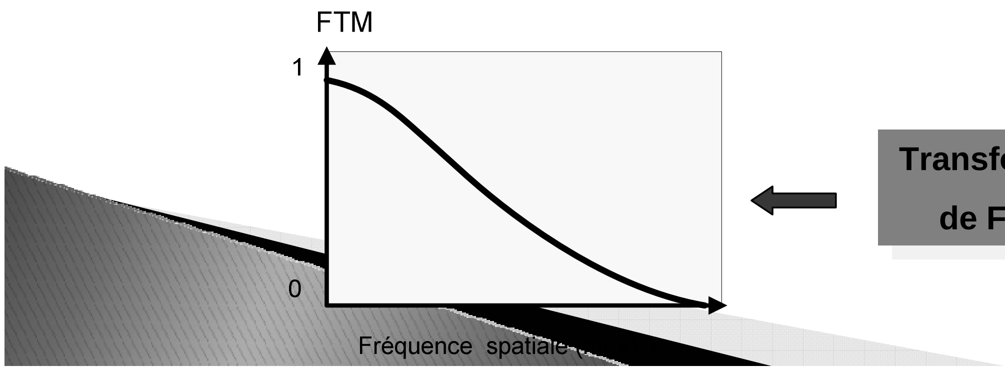
Fonction de Transfert de Modulation (FTM) déduite de la Fonction de Réponse à une Fente (FRF)

Plutôt que de mesurer la FTM, il est plus simple de mesurer la réponse à une source de type « fente » (« Line spread function - LSF » ou encore « Slit reponse function - SRF »





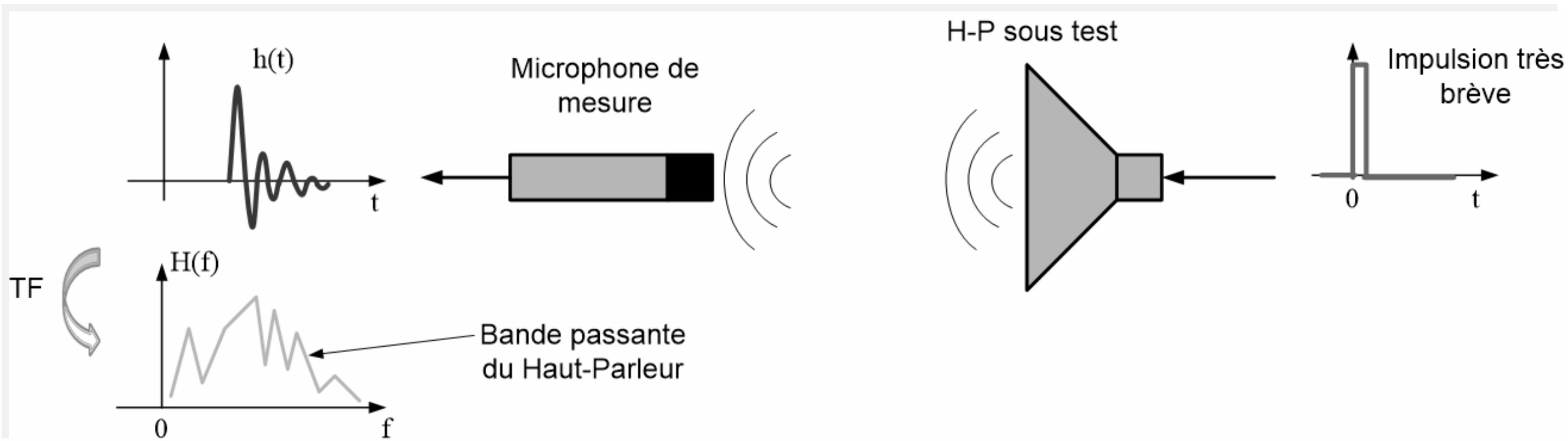
Transformation de Fourier



Fonction de Transfert - Application

MESURE DE LA BANDE PASSANTE D'UN HAUT-PARLEUR

Par une seule mesure, celle de la réponse impulsionnelle, après TF on obtient la Fonction de Transfert c-à-d la Bande Passante du HP



SOMMAIRE

Définition du traitement du signal et des images – Notion de fréquence

TF 1D de signaux continus
- o Décomposition en série de Fourier (signaux périodiques)
- o Transformée de Fourier (signaux apériodiques)
- o Analyse vibratoire – Analyse Cepstrale
- o Les analyseurs de spectres analogiques
- o Analyse Temps-Fréquence
- o TF à fenêtre glissante
- o Analyse en Ondelettes - Application

TF 2D (image) de signaux continus
- o Définition
- o Notion de fréquence spatiale
- o Exemples
- o Applications de la TF 2D

Convolution – Réponse impulsionnelle
- o Distribution de Dirac
- o La Convolution – Réponse impulsionnelle
- o Fonction de Transfert et ses applications (électronique, thermique, acoustique,…)

Fonctions de Corrélation
- o Intercorrélation et application
- o Autocorrélation et applications

Annexes
- o TF
- o TF à fenêtre glissante
- o Transformée en Ondelettes

Intercorrélation

DÉFINITION

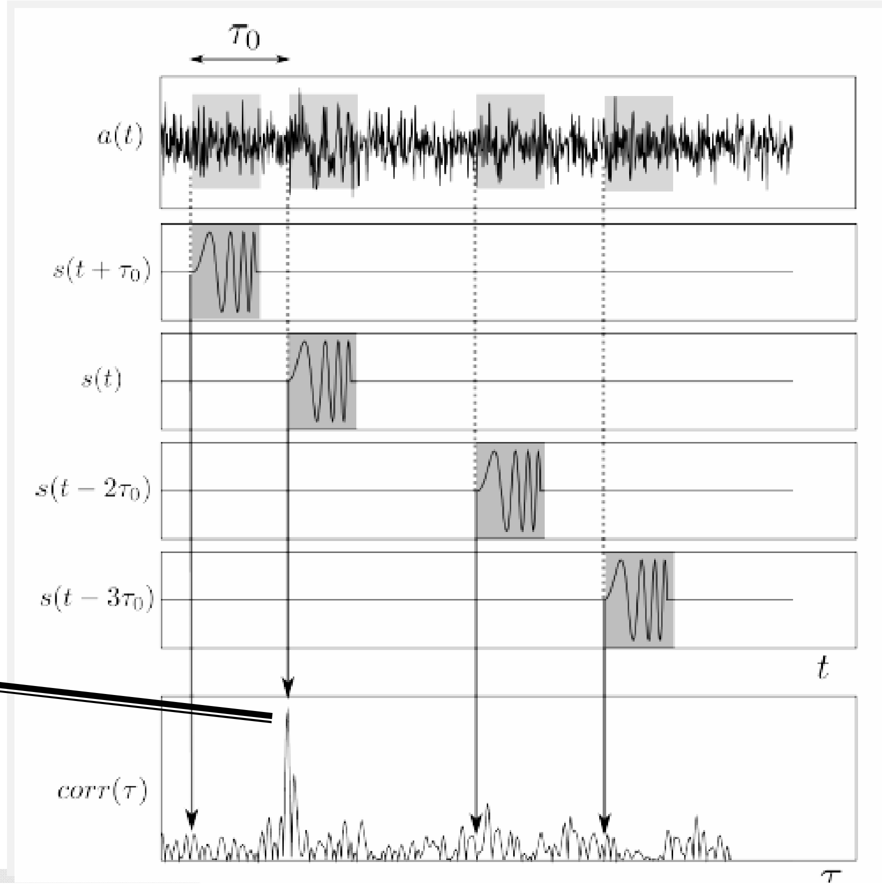
Pour mesurer le **degré de similitude** ou de dépendance de deux phénomènes distincts, on définit un **coefficient de corrélation** qui doit être maximum lorsque le degré de vraisemblance des deux signaux est max, et nul dans le cas contraire

L'intercorrelation mesure la similitude entre ces deux signaux.

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,.\,y(t-\tau)\,dt$$

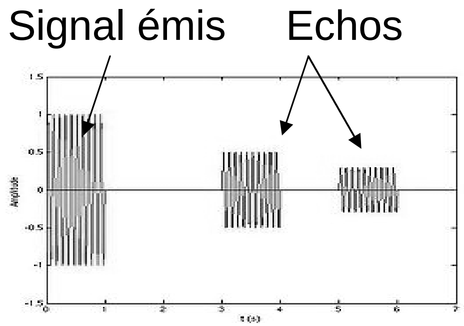
où τ est un paramètre de décalage permettant de trouver la meilleure correspondance entre les deux signaux.

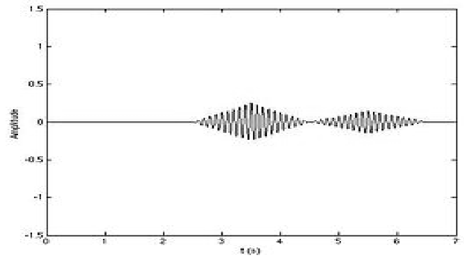
Ressemblance max



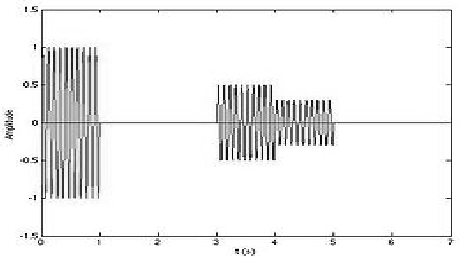
Application – Détection d'échos

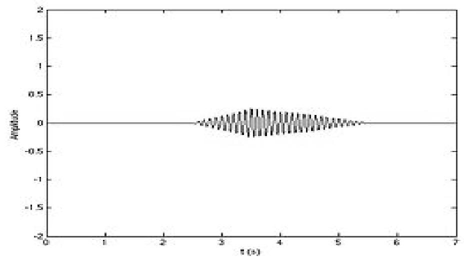
IMPULSION SIMPLE





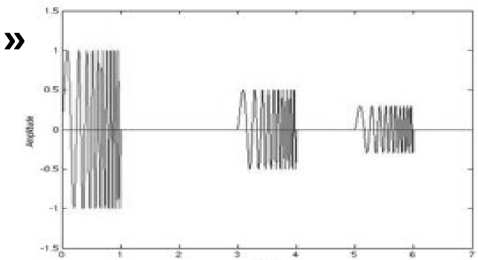
cibles écartées …… les échos sont distinguables.

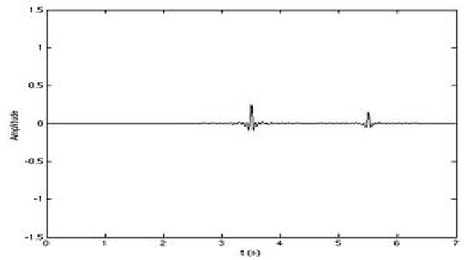




cibles trop proches … les échos sont confondus.

IMPULSION « CHIRPÉE »



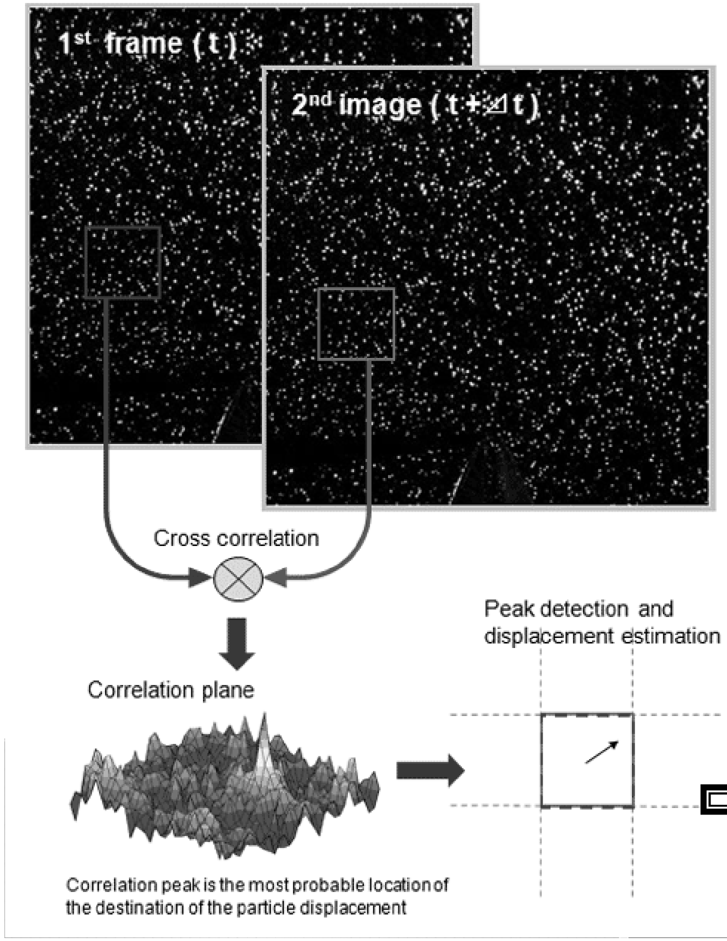


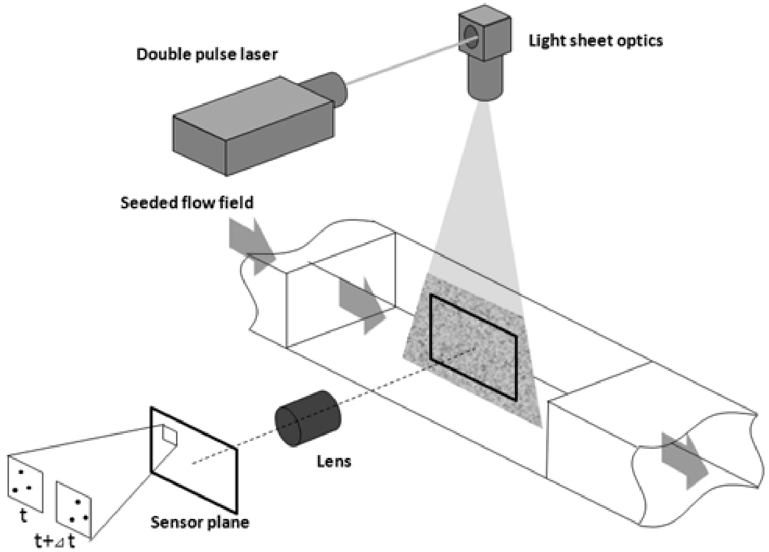
Avant traitement adapté … après intercorrélation : les échos sont plus courts.

Application

Intercorrélation pour la mesure du déplacement et de la vitesse de particules

Le PIV (Particule Image Velocity) est une technique d'imagerie pour mesurer la répartition des vitesses dans le plan défini par le laser. Elle est largement utilisée en **mécanique des fluides**.





La séparation temporelle entre deux images est mesurée donc la direction et la vitesse peuvent être calculées.

AUTOCORRÉLATION

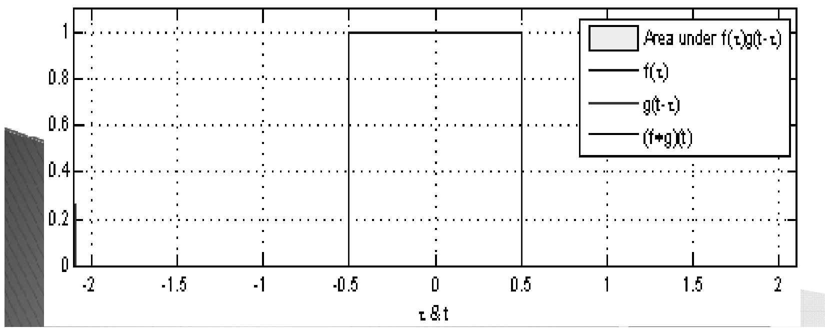
DEFINITION

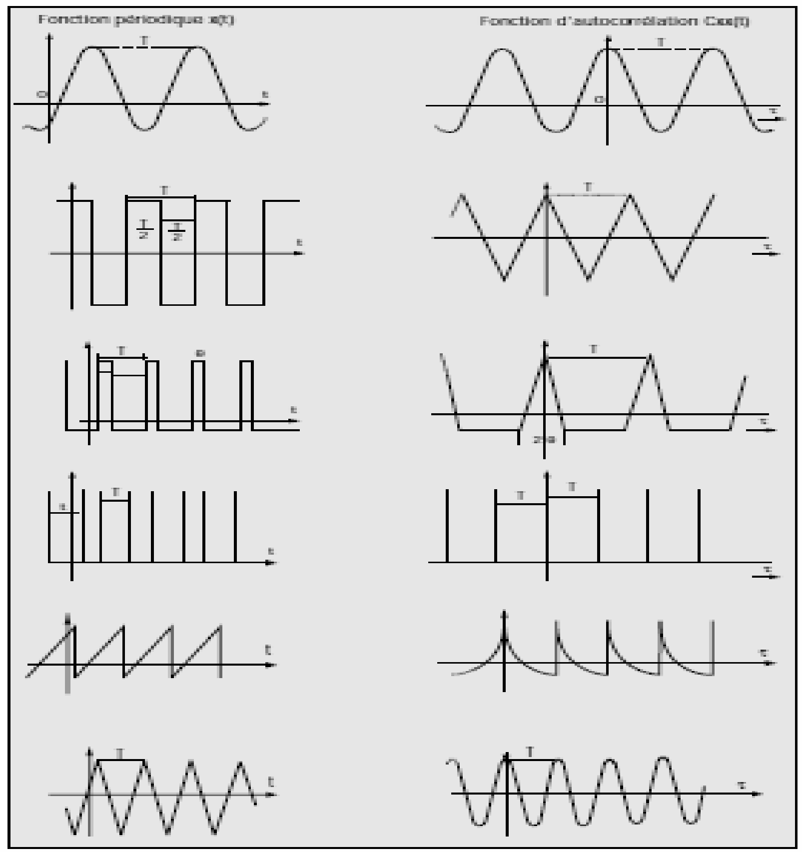
L'autocorrélation est une intercorrélation du signal avec une version décalée de lui-même :

Permet de détecter des périodicités peut-être invisibles au premier examen

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \,.\, x(t-\tau)\, dt$$

où τ est un paramètre de décalage permettant de trouver la meilleure correspondance entre les deux signaux.





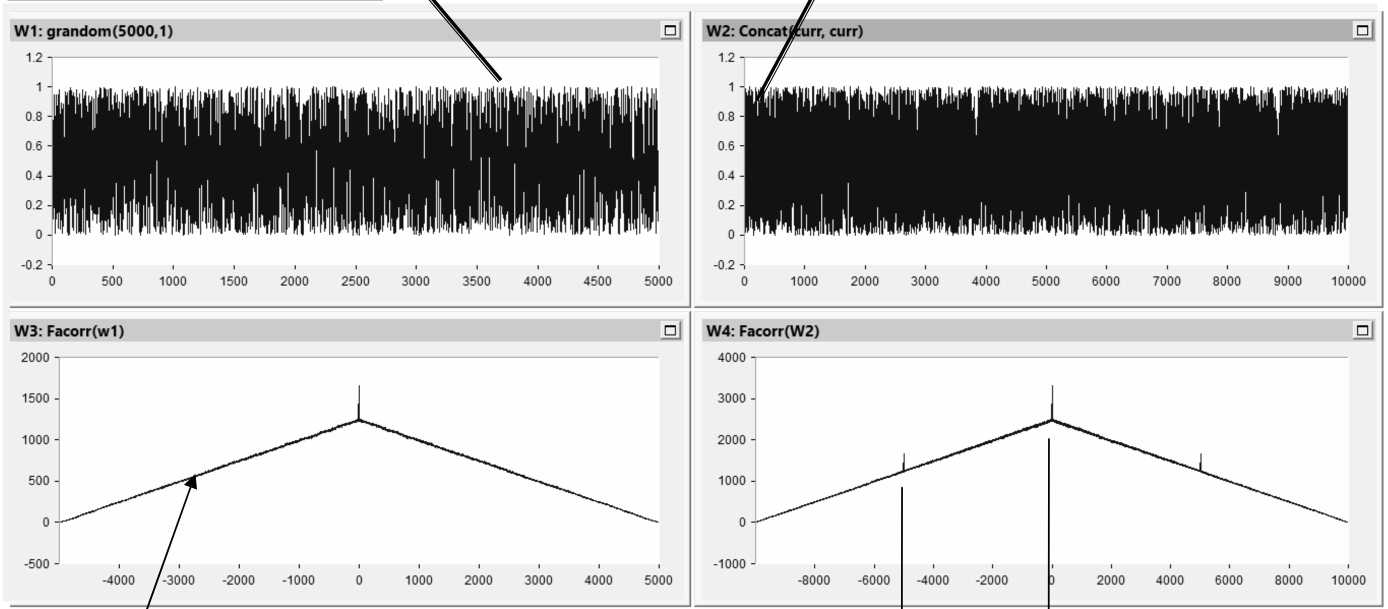
Exemples de fonctions d'auto-corrélation de signaux périodiques.

Application

AUTOCORRÉLATION D'UN SIGNAL ALÉATOIRE ET PSEUDO-ALÉATOIRE

Signal aléatoire
→ apériodique

Signal pseudo aléatoire
→ périodique



La forme triangulaire provient de l'autocorrélation de la fenêtre rectangulaire

T période du signal invisible dans la représentation temporelle

MERCI DE VOTRE ATTENTION !

SOMMAIRE

Définition du traitement du signal et des images – Notion de fréquence

TF 1D de signaux continus

- Décomposition en série de Fourier (signaux périodiques)
- Transformée de Fourier (signaux apériodiques)
- Analyse vibratoire – Analyse Cepstrale
- Les analyseurs de spectres analogiques
- Analyse Temps-Fréquence
- TF à fenêtre glissante
- Analyse en Ondelettes - Application

TF 2D (image) de signaux continus

- Définition
- Notion de fréquence spatiale
- Exemples
- Applications de la TF 2D

Convolution – Réponse impulsionnelle

- Distribution de Dirac
- La Convolution – Réponse impulsionnelle
- Fonction de Transfert et ses applications (électronique, thermique, acoustique,…)

Fonctions de Corrélation

- Intercorrélation et application
- Autocorrélation et applications

Annexes

- TF
- TF à fenêtre glissante
- Transformée en Ondelettes

Annexes

Jean B. Joseph Fourier

(1768-1830)

Inspiré de :

Mahdi Vasighi - Continuous Wavelet Transformation - *Institute for Advanced Studies in Basic Sciences – Zanjan*

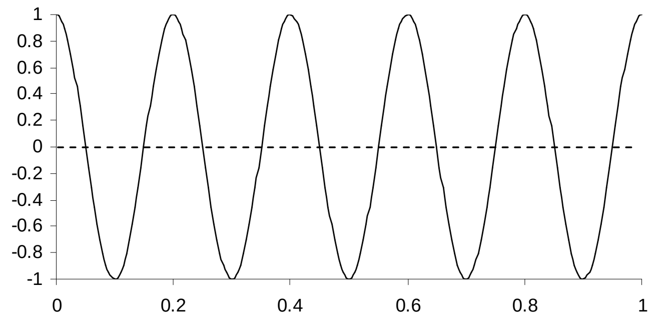
Tranformée de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bullet e^{-2\pi jft}$$

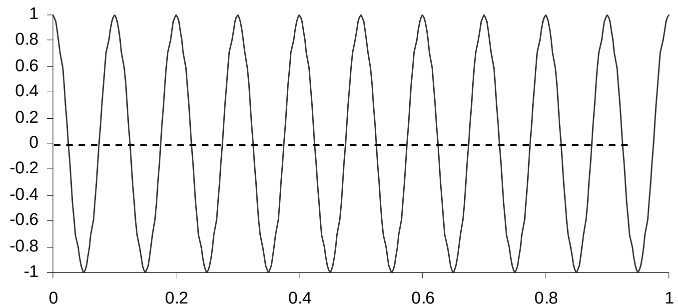
Signal
(time domain)

$$\cos(2\pi ft) + j.\sin(2\pi ft)$$

x(t)	cos(2πft)



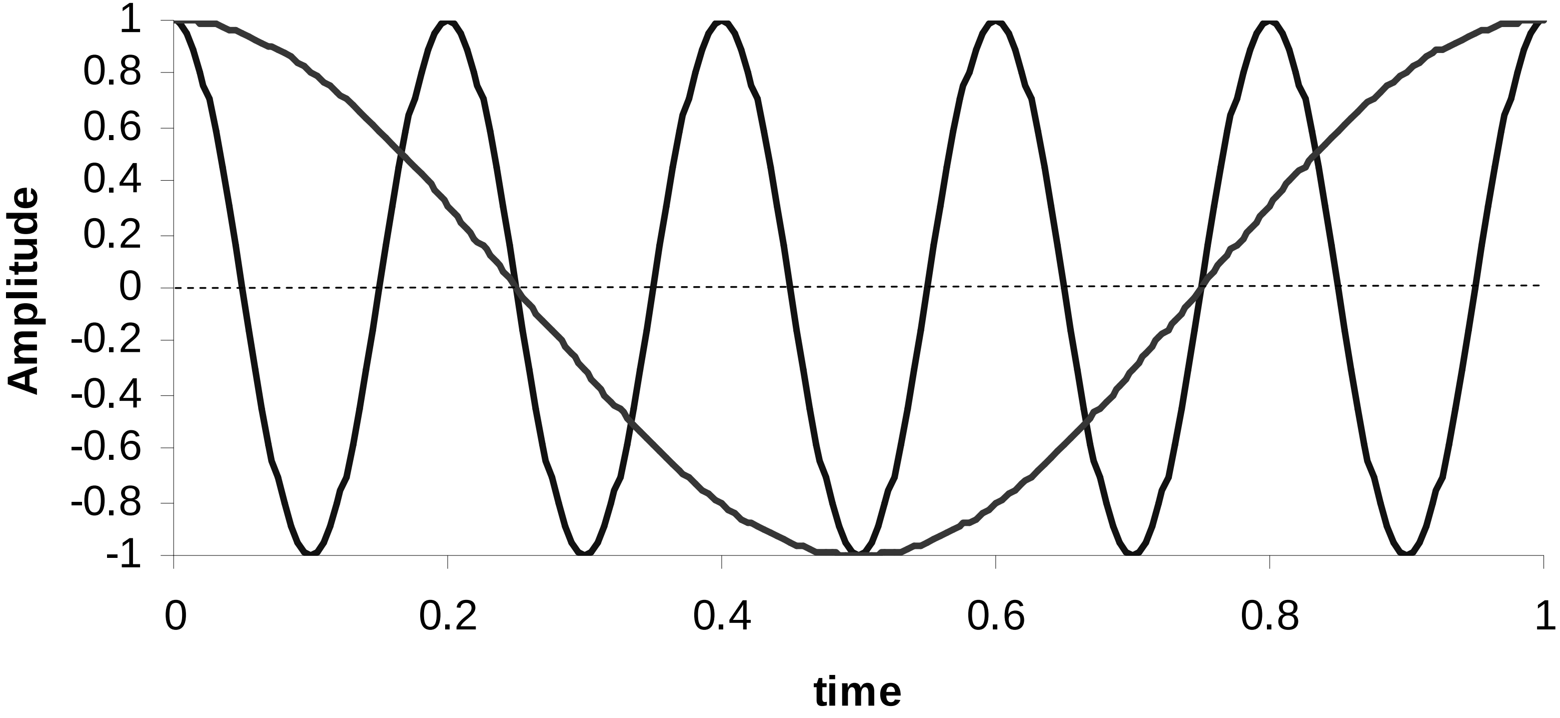
5Hz



10Hz

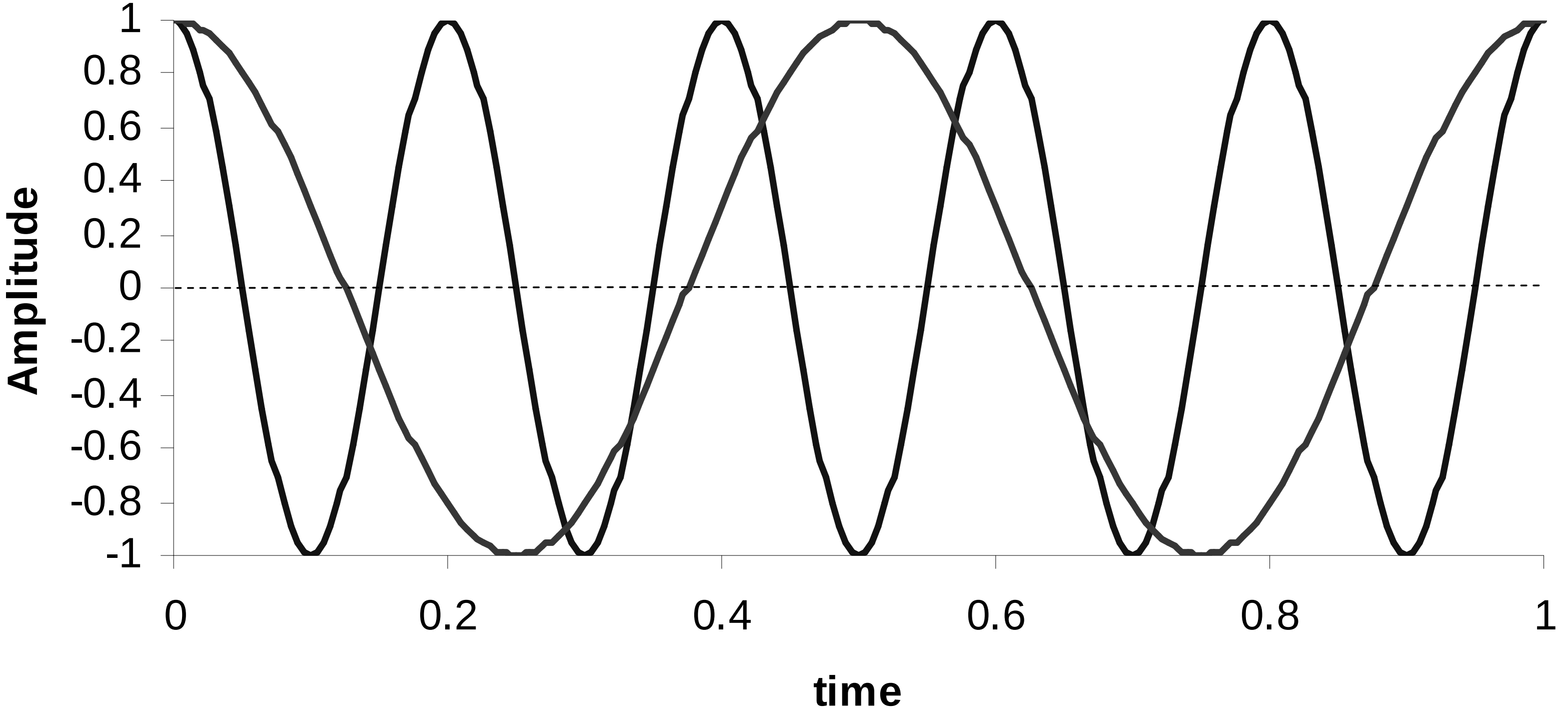
1 Hz

$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = -8.8e-15**



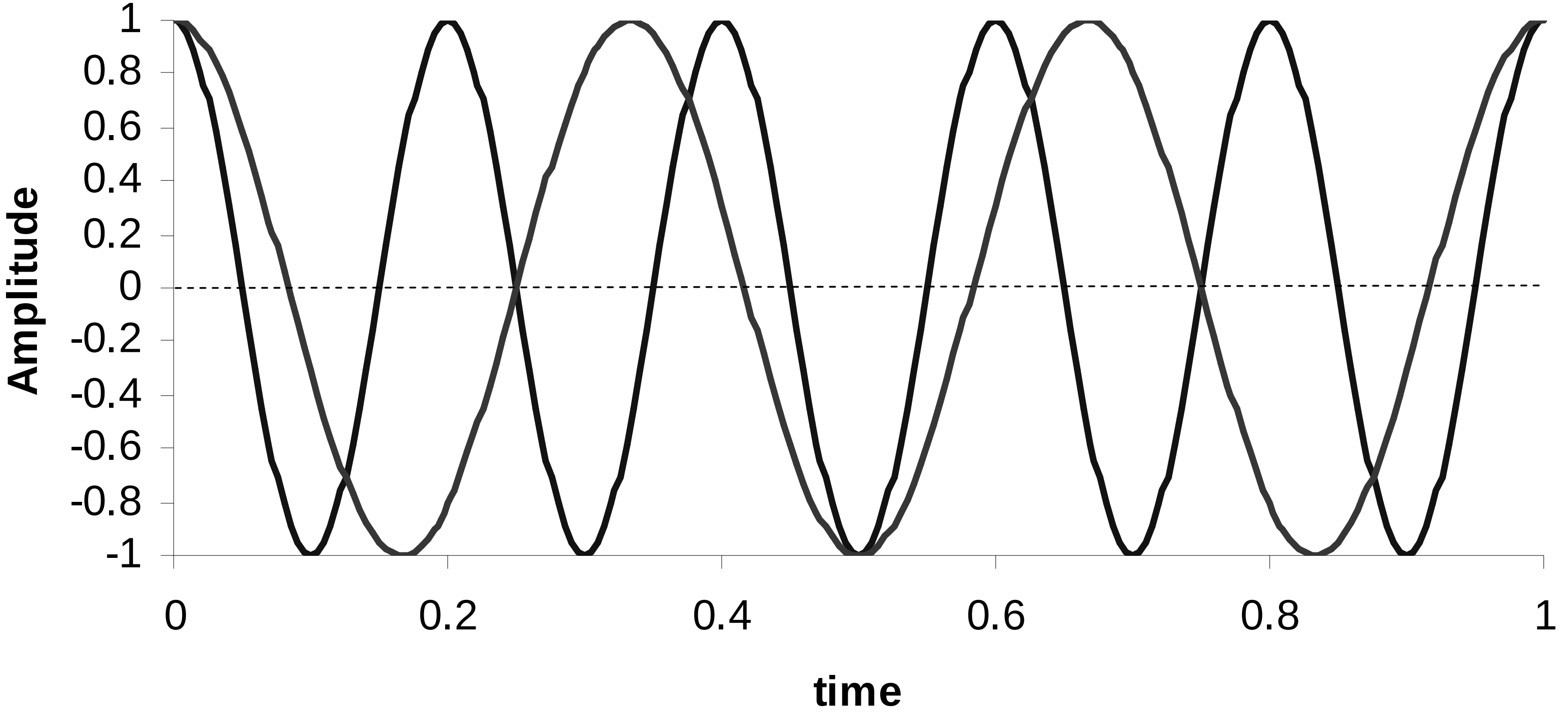
2 Hz

$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = -5.7e-15**



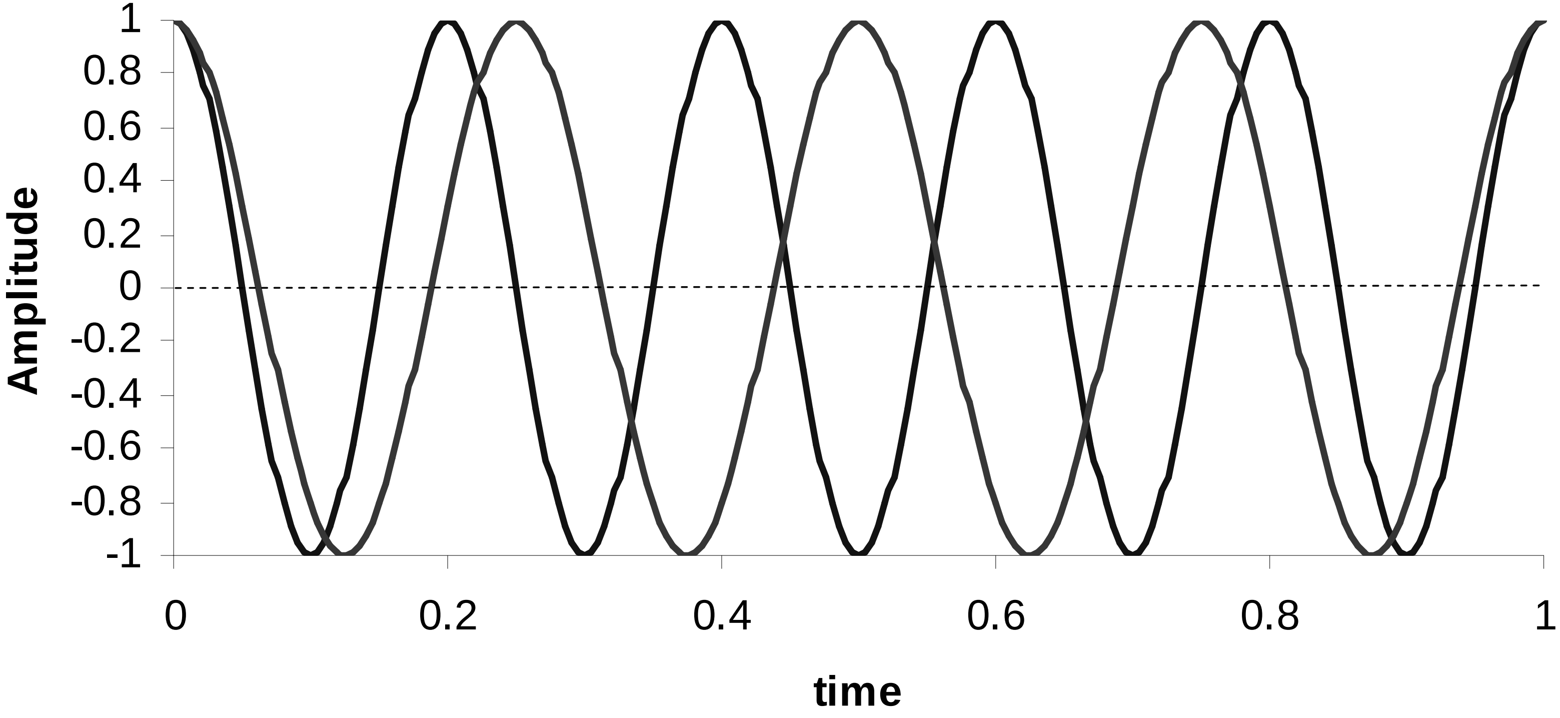
3 Hz

$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = -4.6e-14**



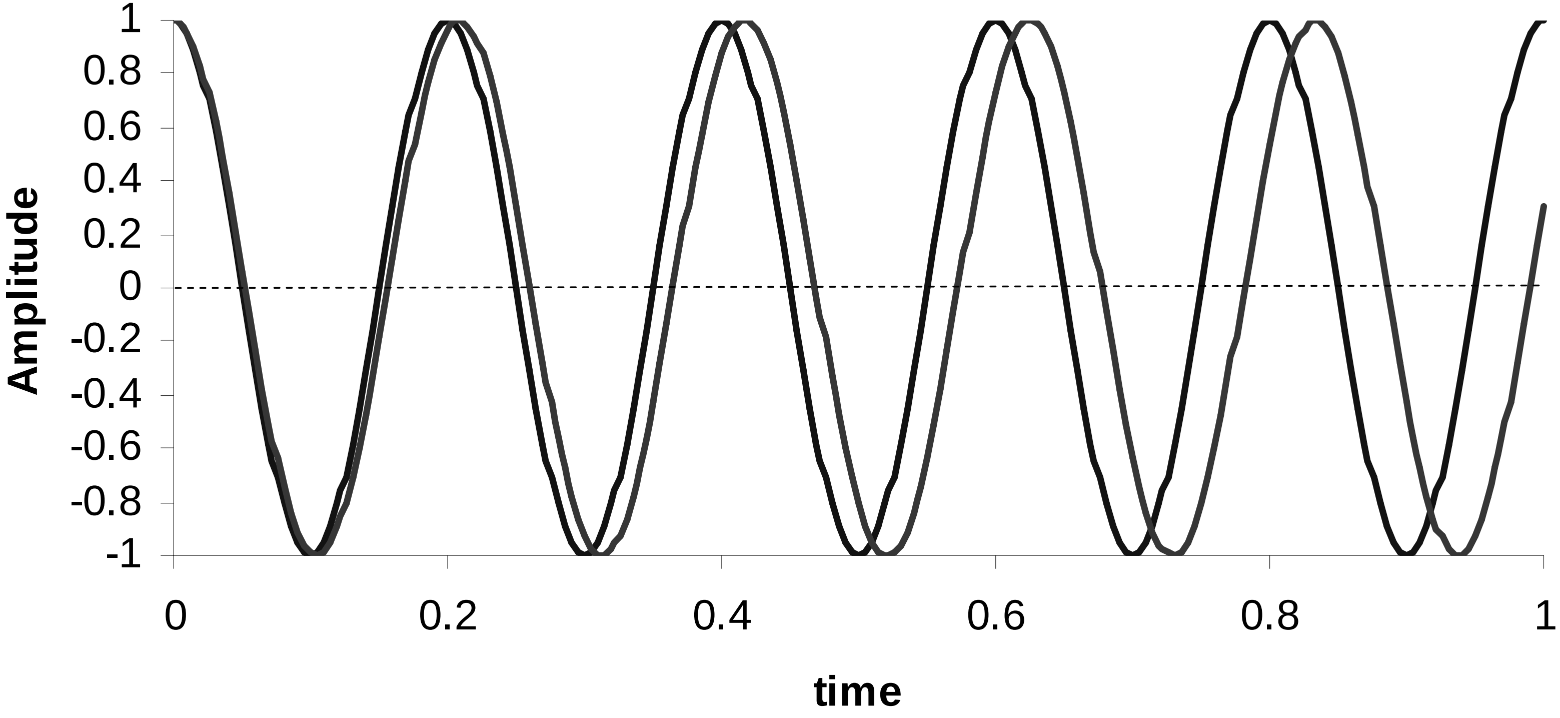
4 Hz

$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = -2.2e-14**



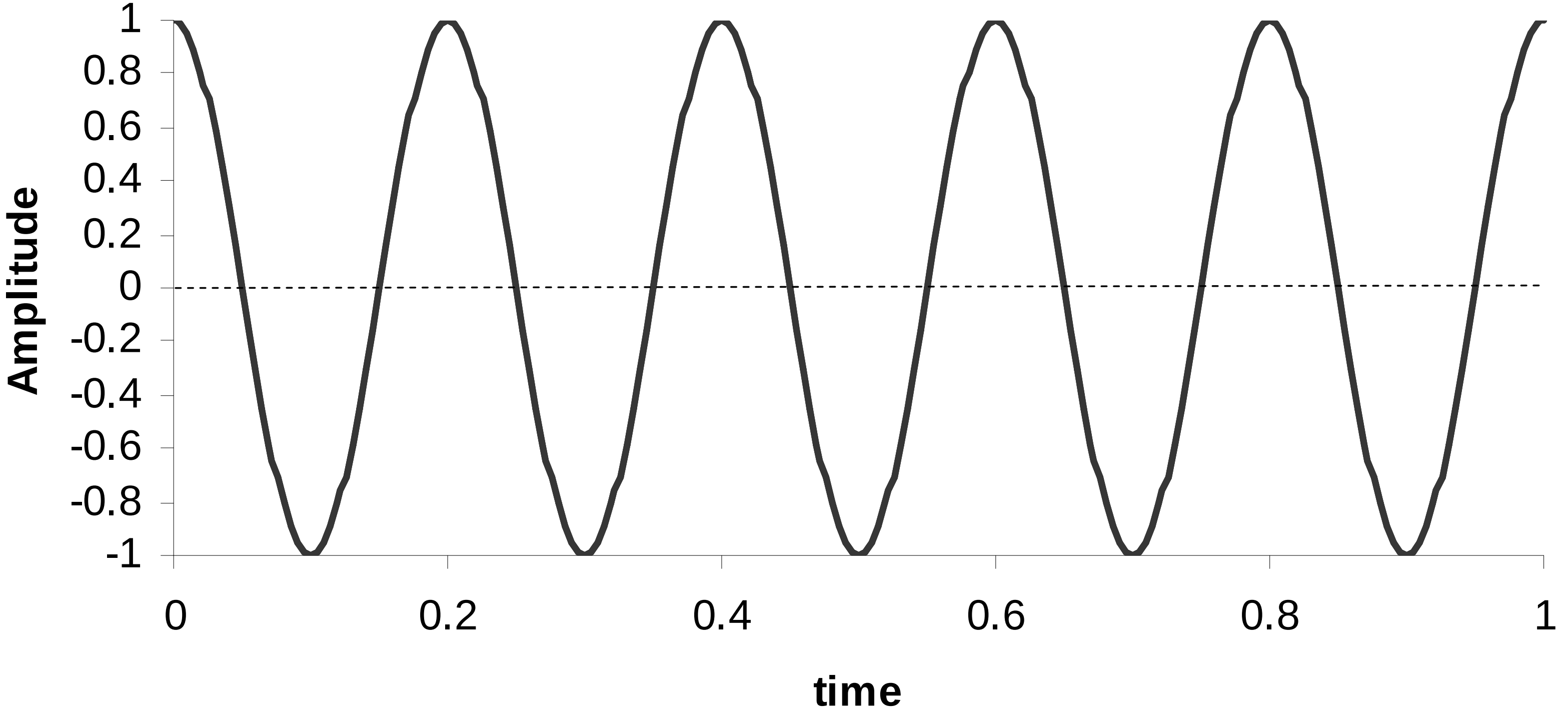
4.8 Hz

$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = 74.5**



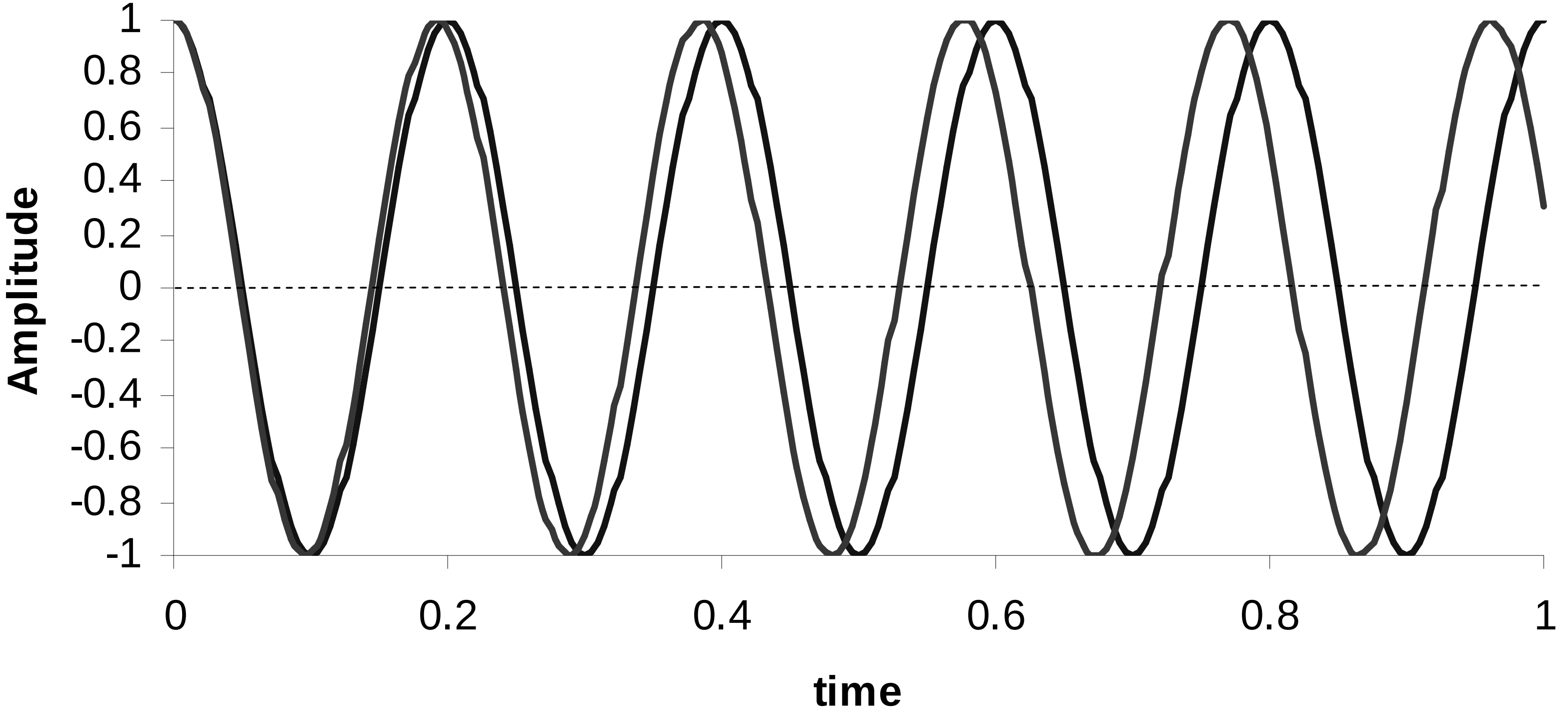
5 Hz

$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = 100**



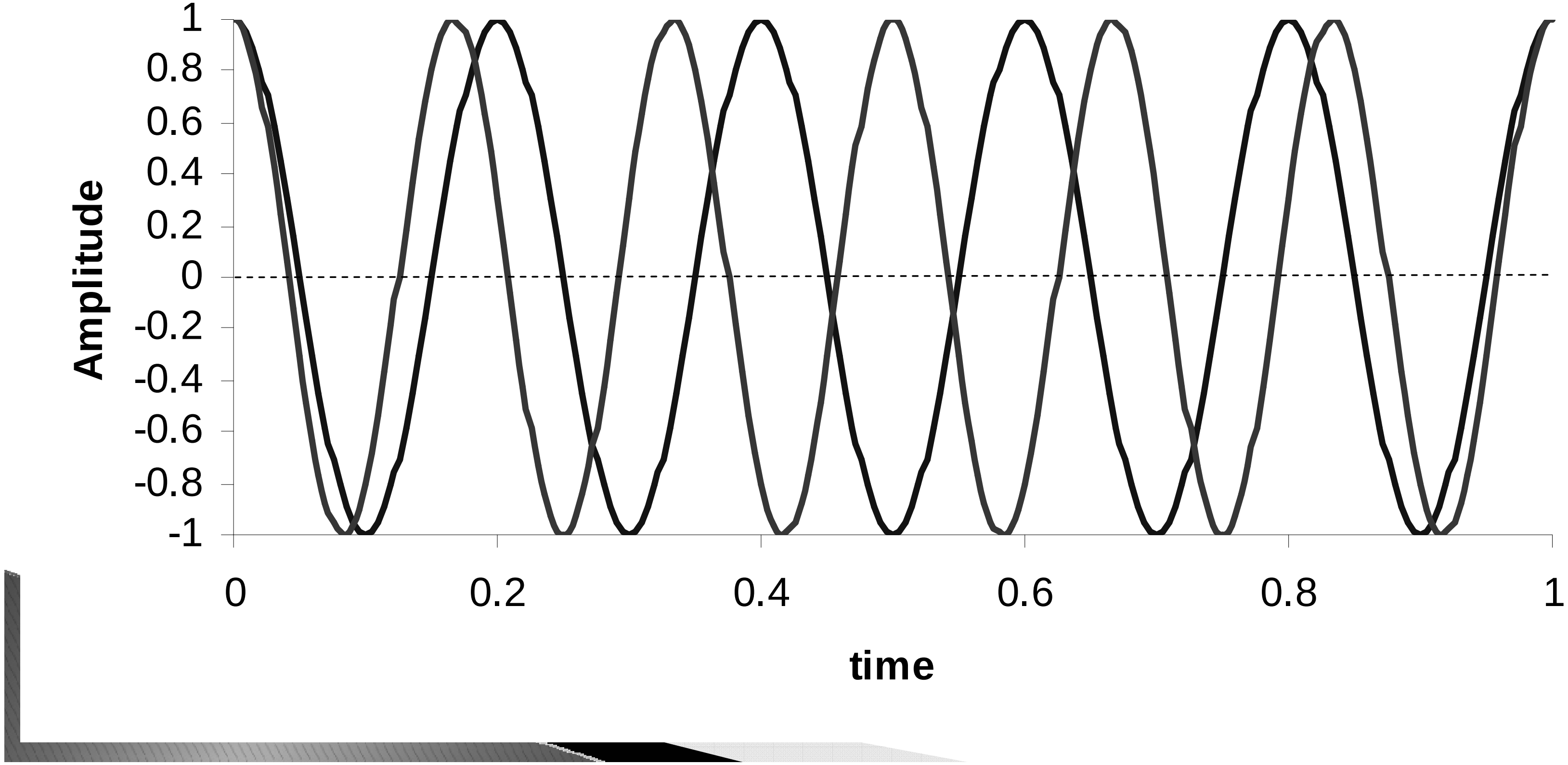
5.2 Hz

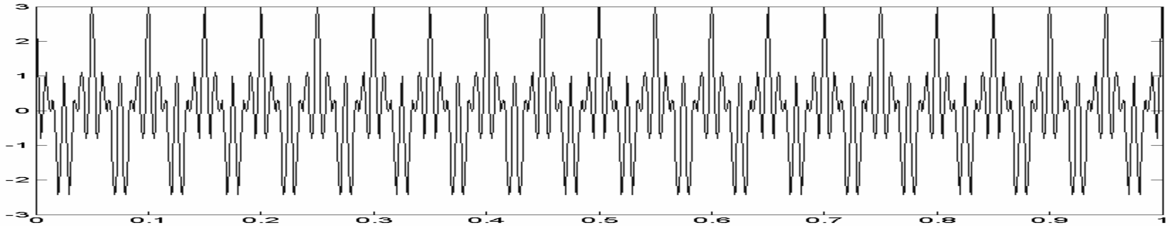
$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = 77.5**



6 Hz

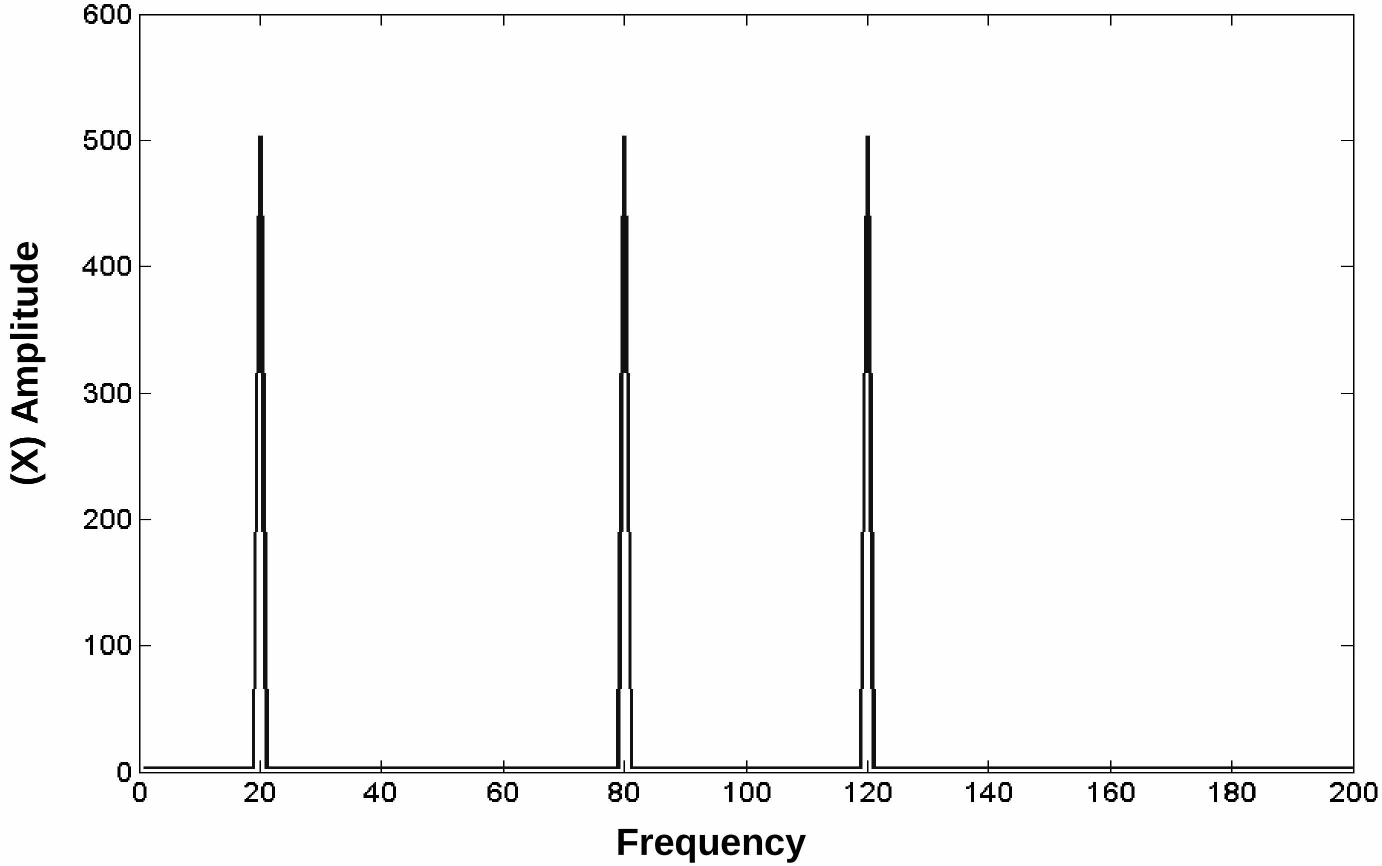
$\sum$ **x(t).*cos(2πft) = 1.0e-14**





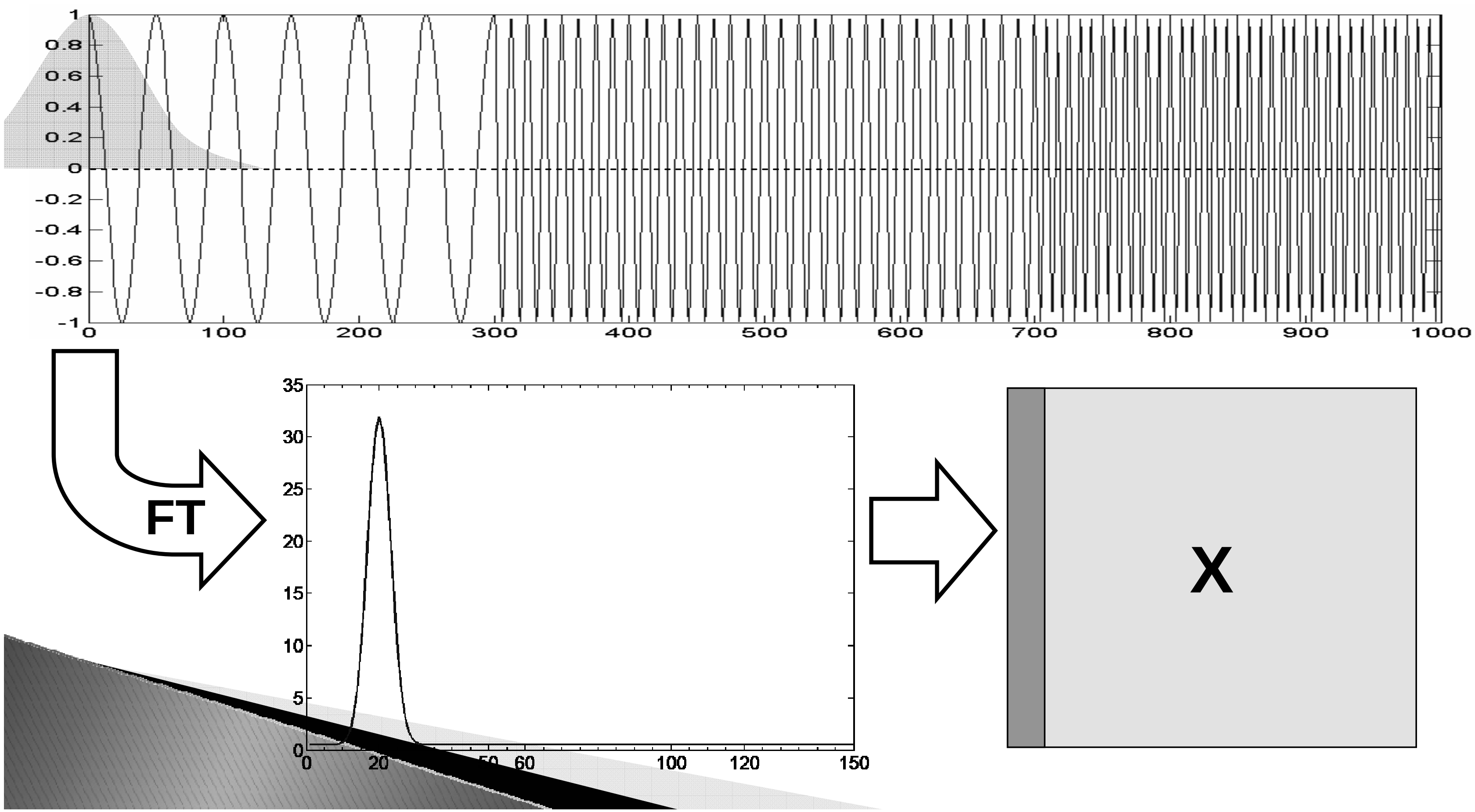
20, 80, 120 Hz

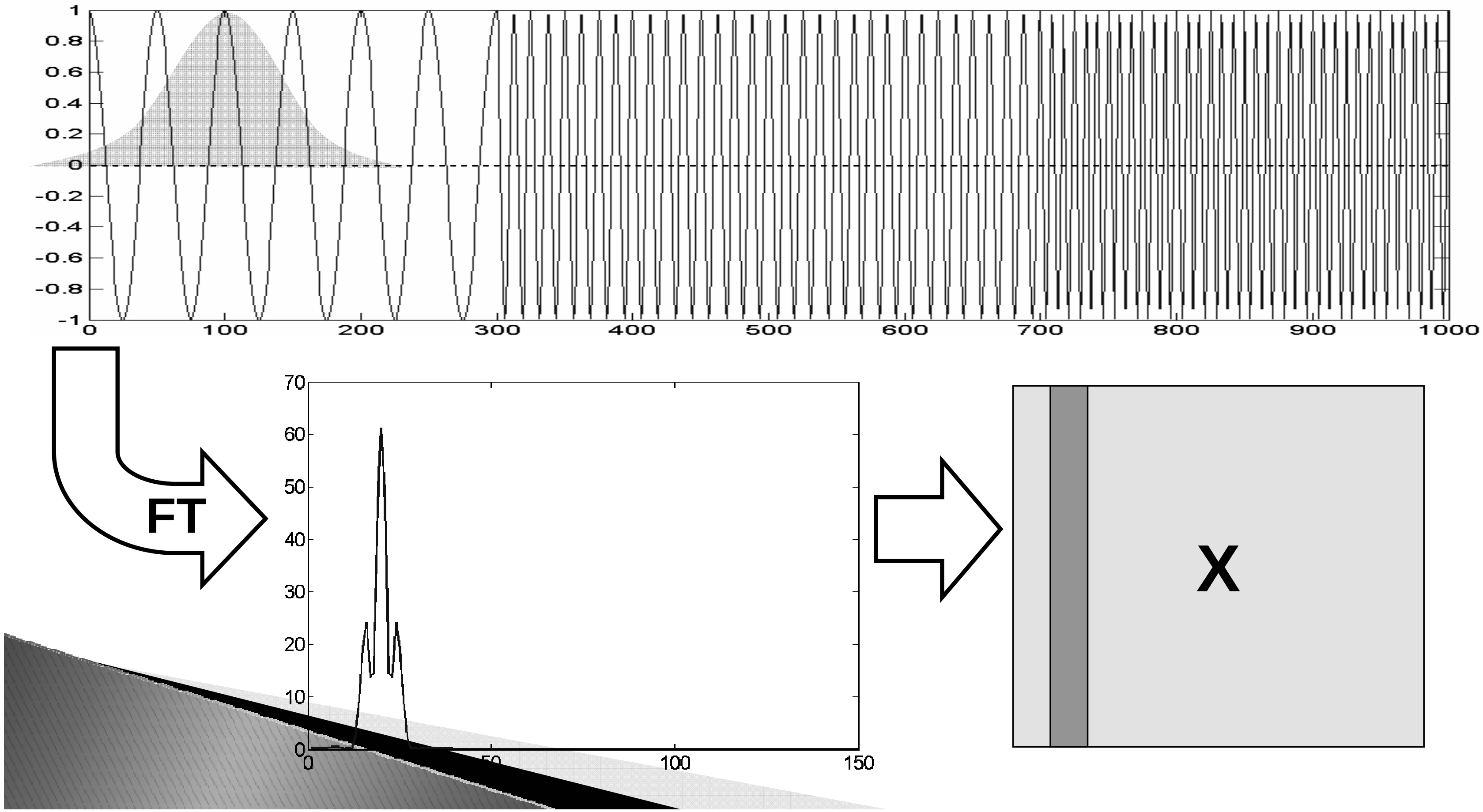
FT

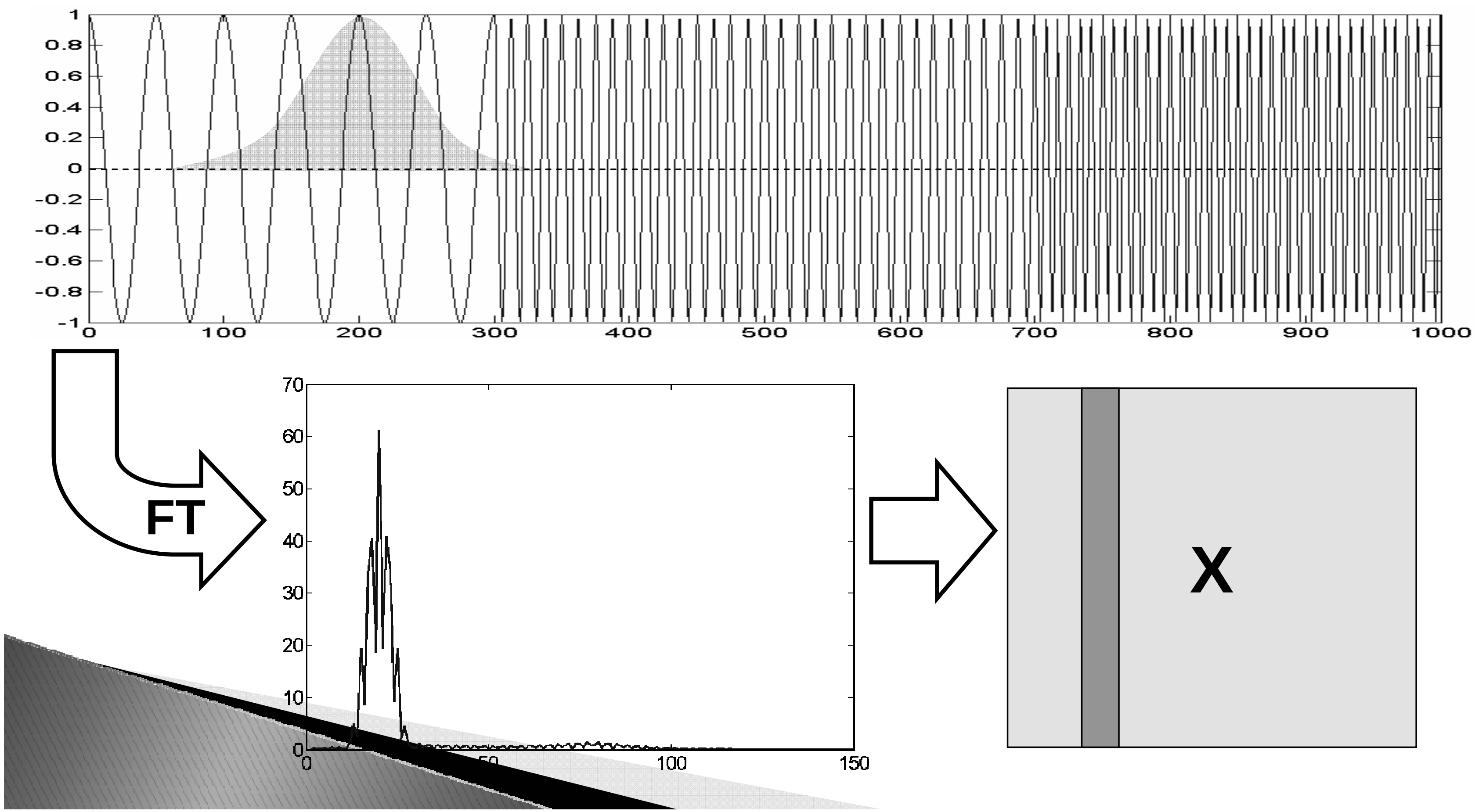


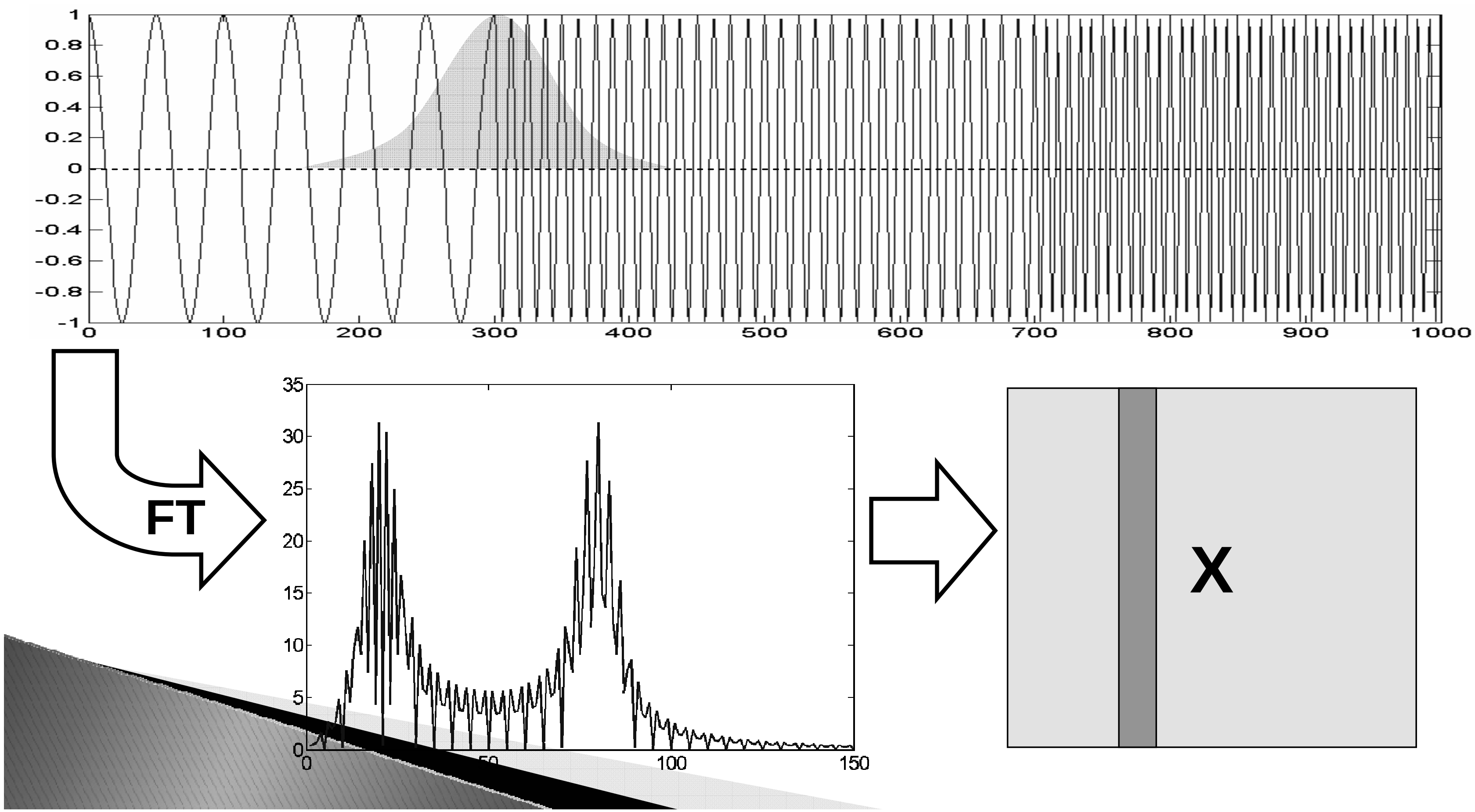
retour

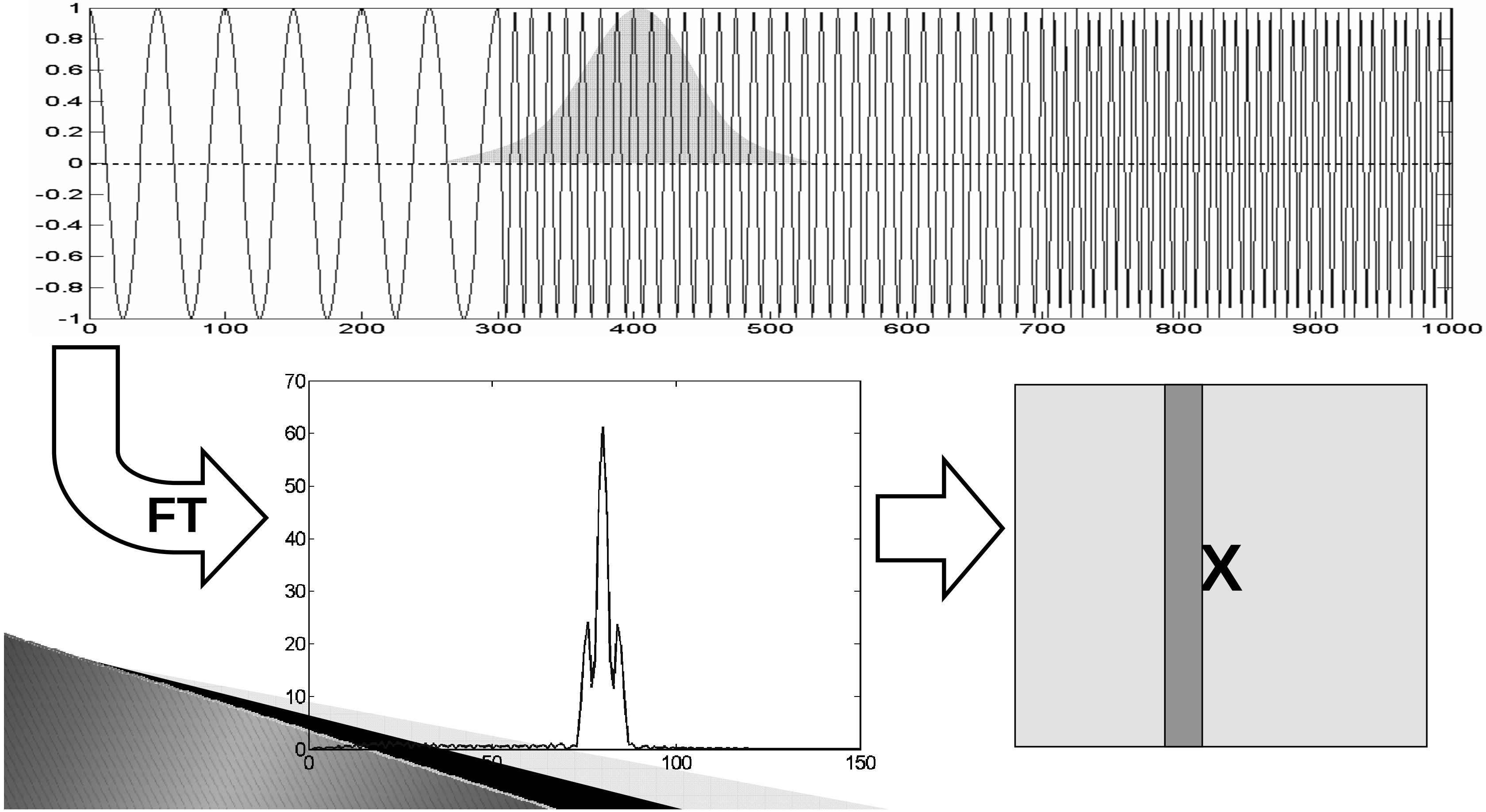
Tranformée de Fourier à fenêtre glissante

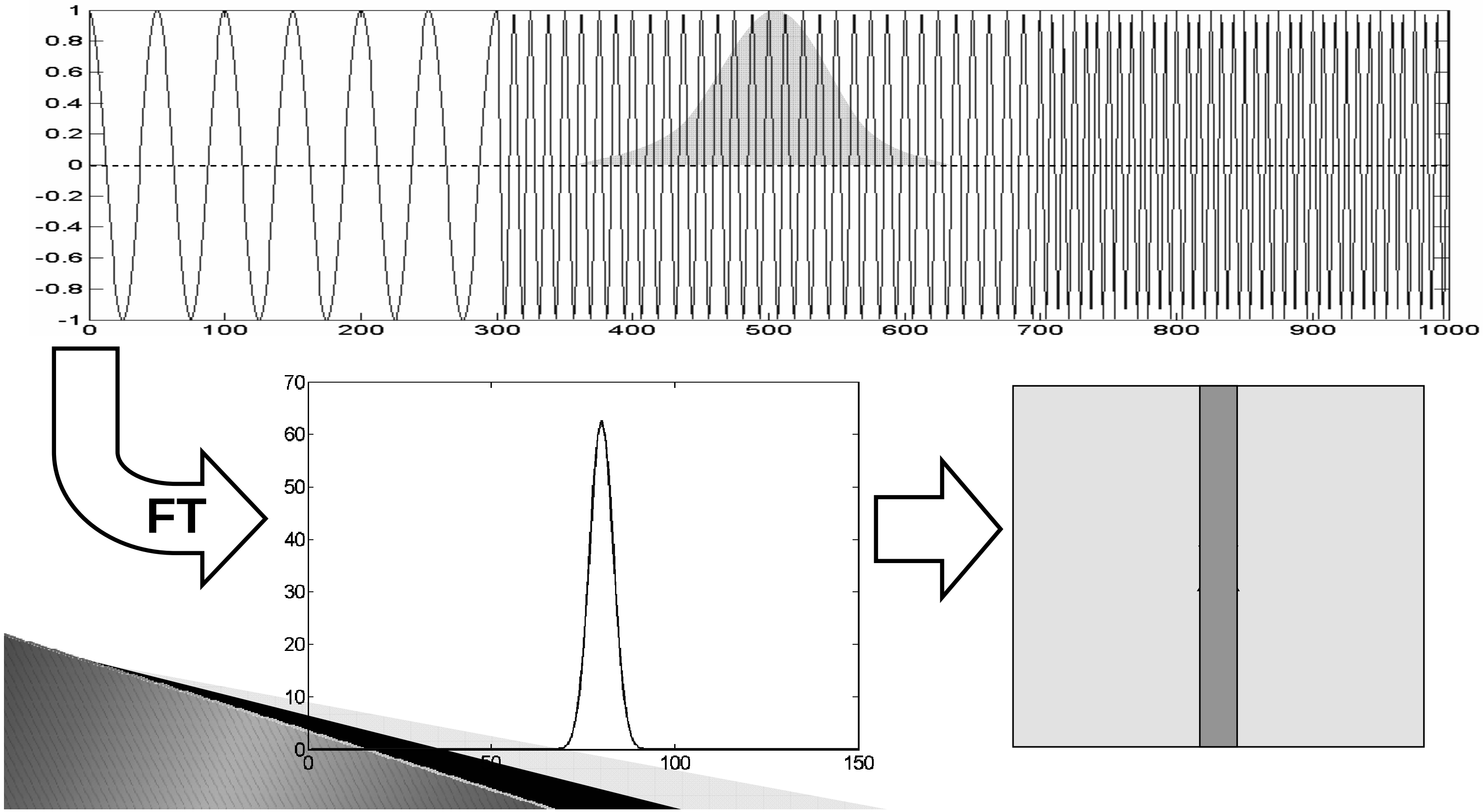


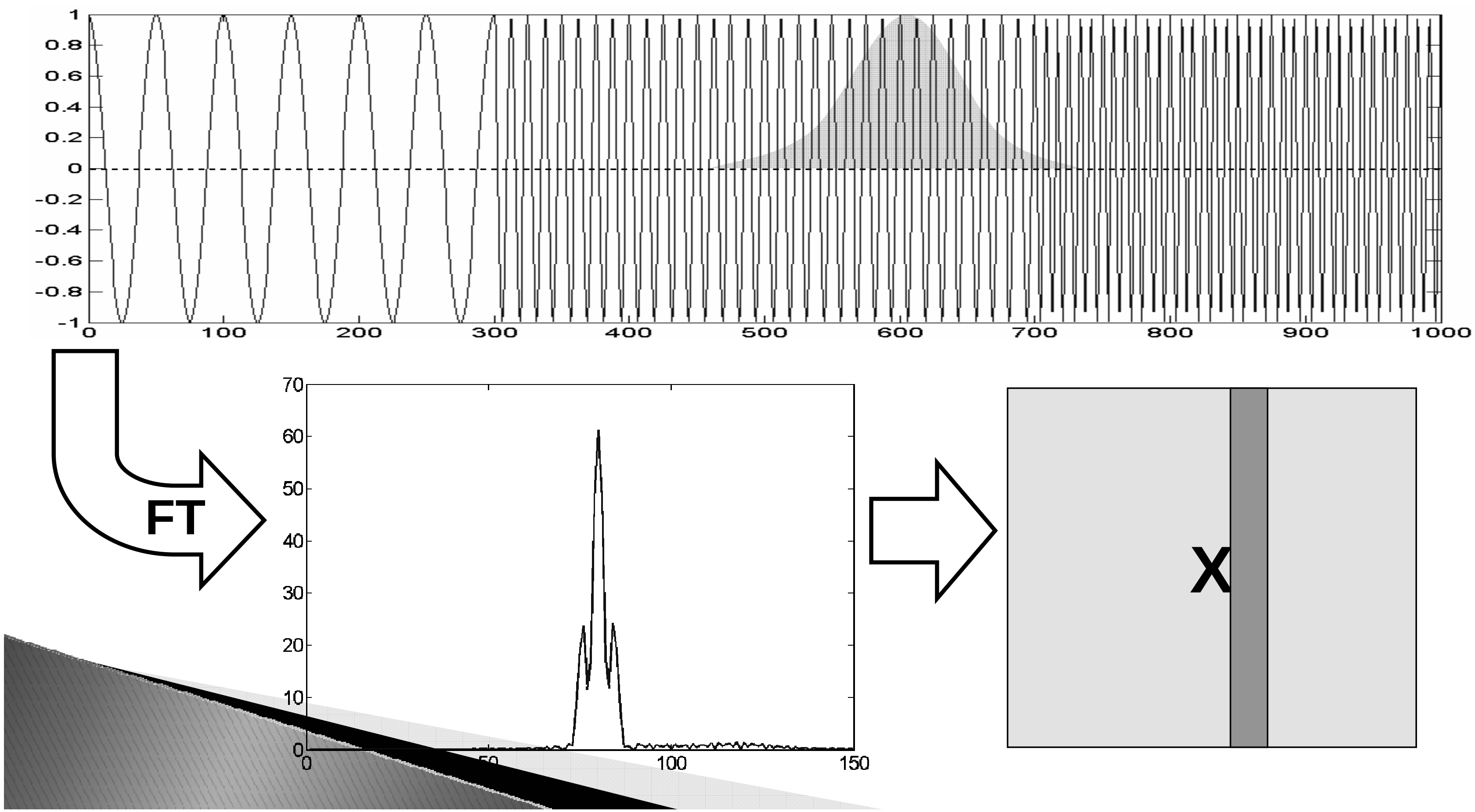

FT
X

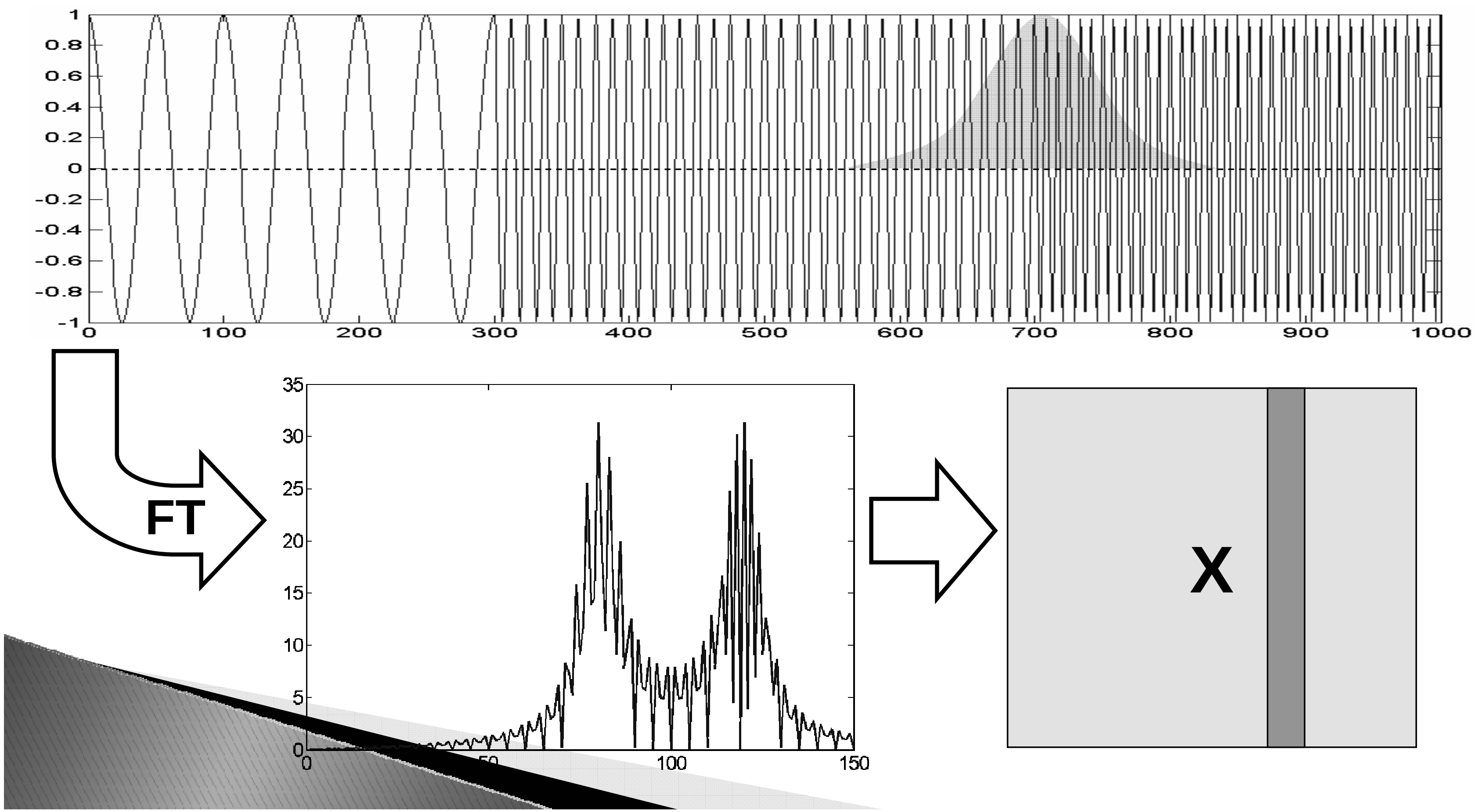

FT
X

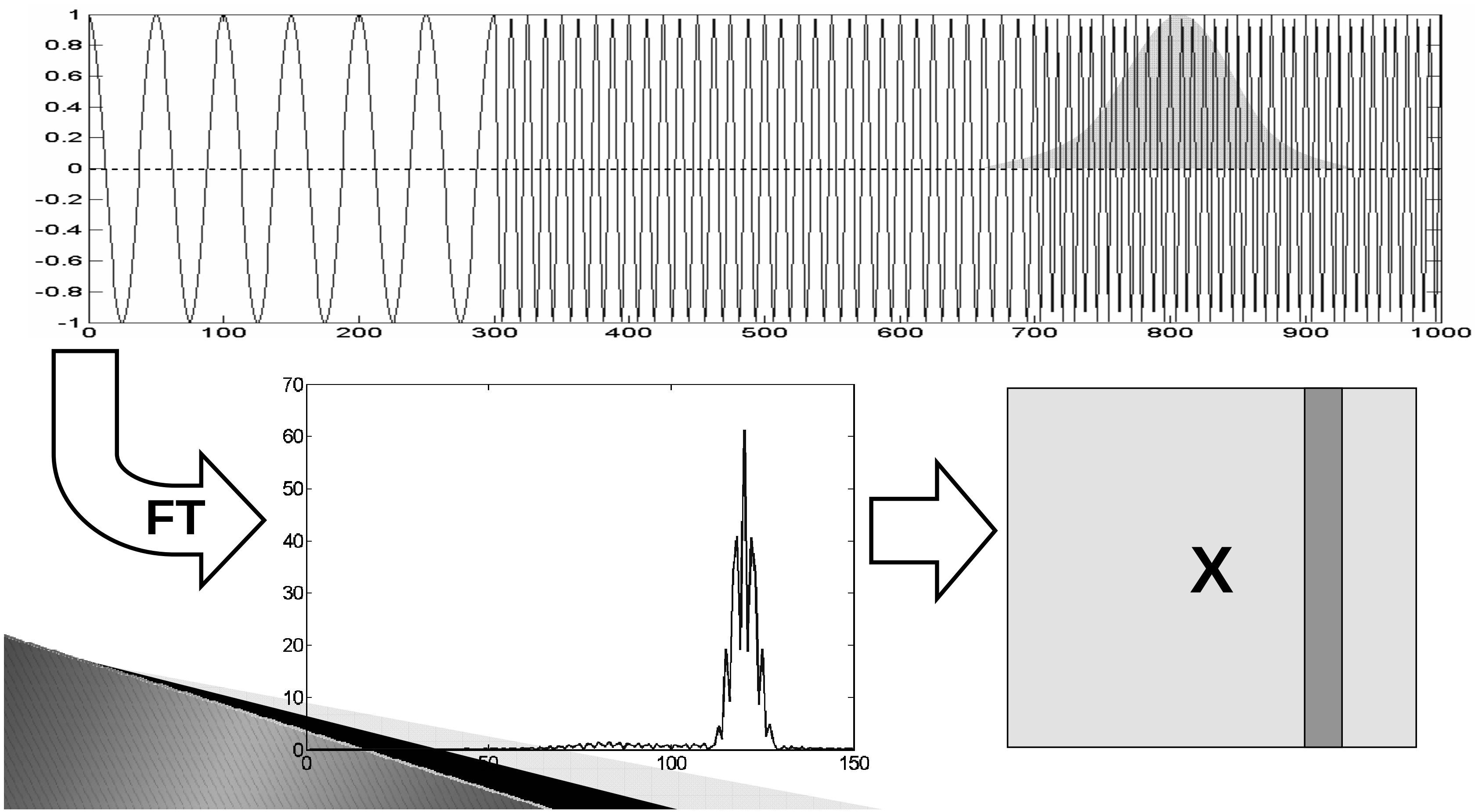

FT
X

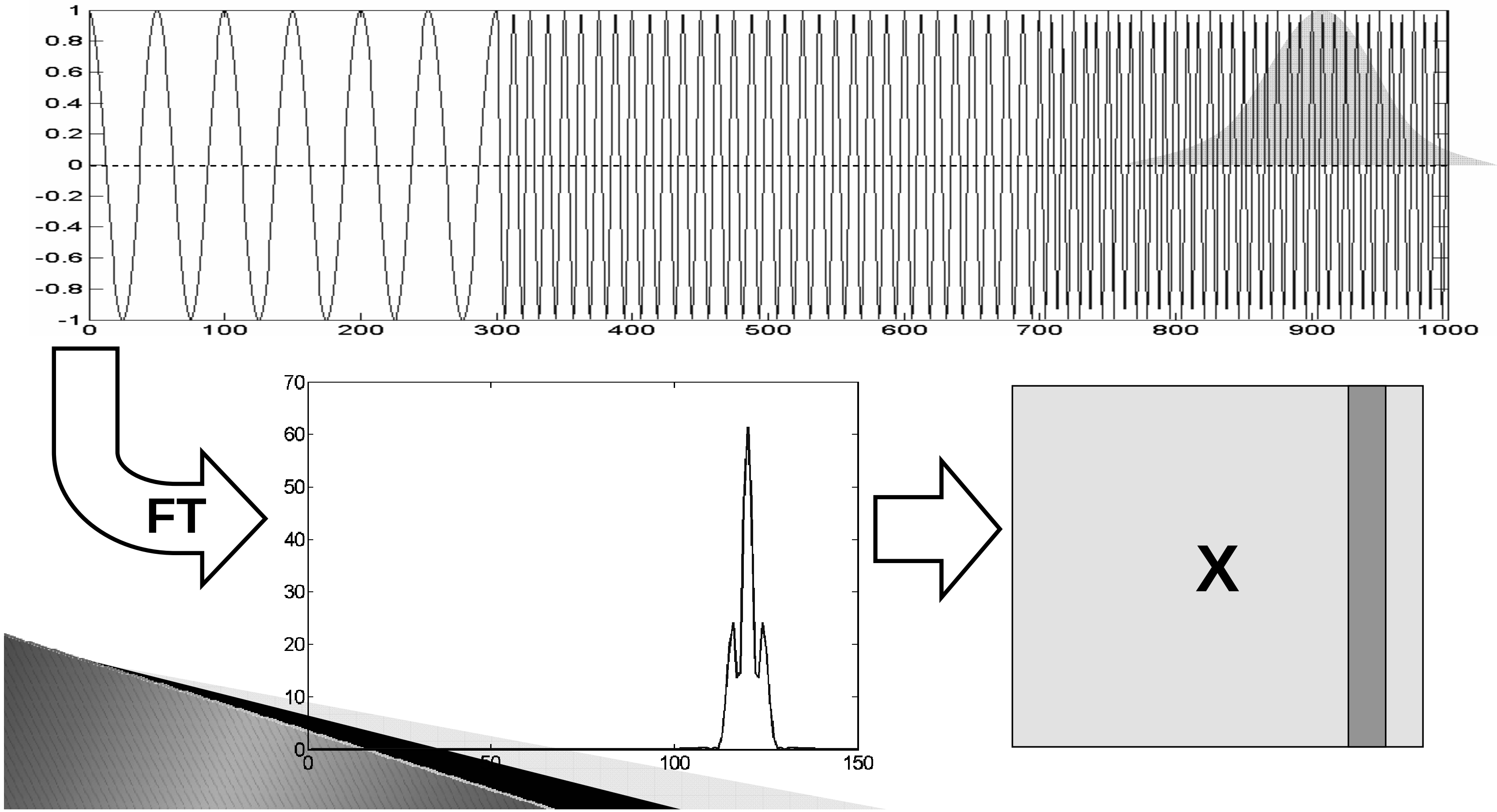

FT
X

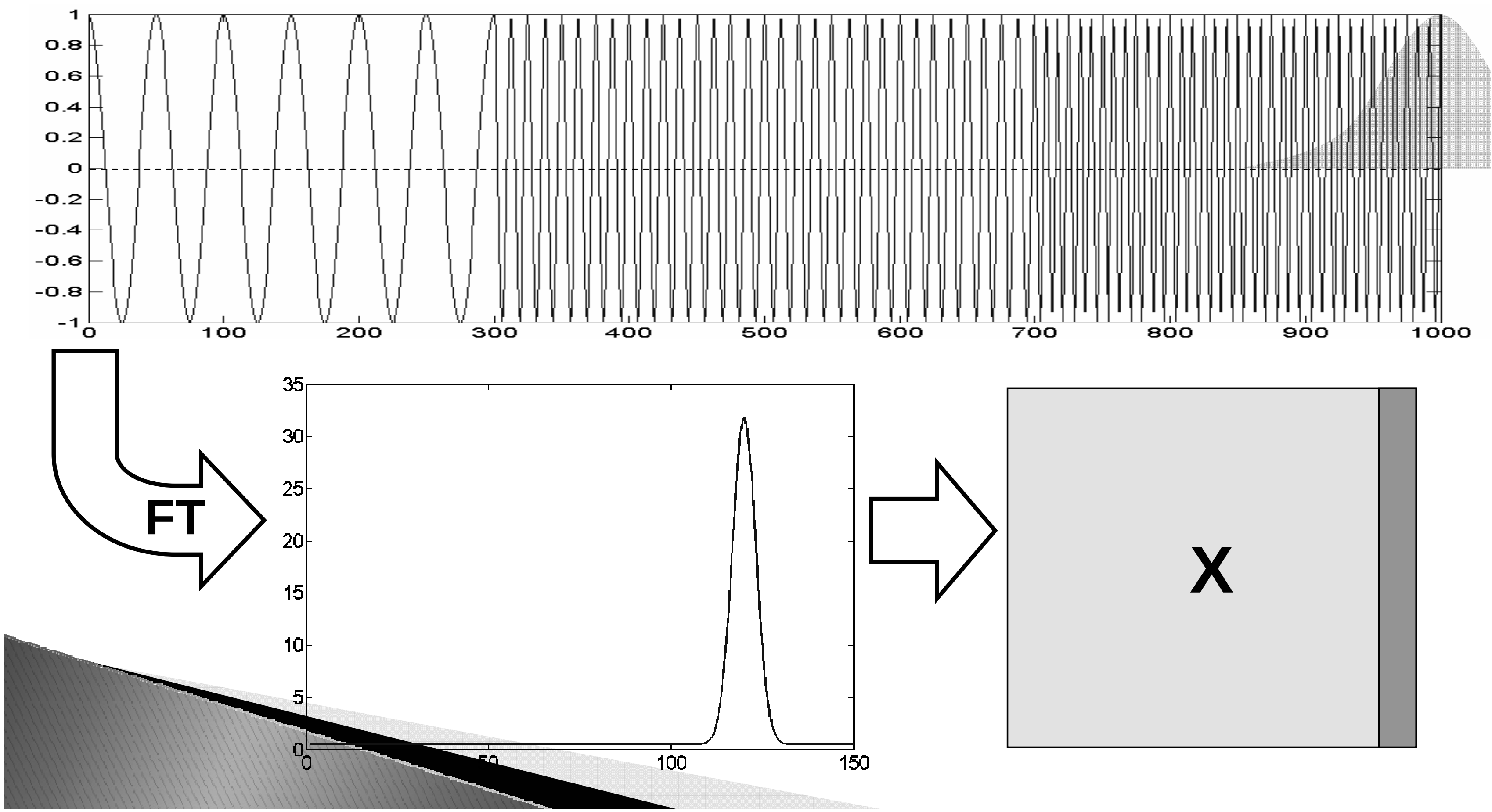

FT


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
FT
70
60
50
40
30
20
10
0
0 50 100 150
X


FT
X

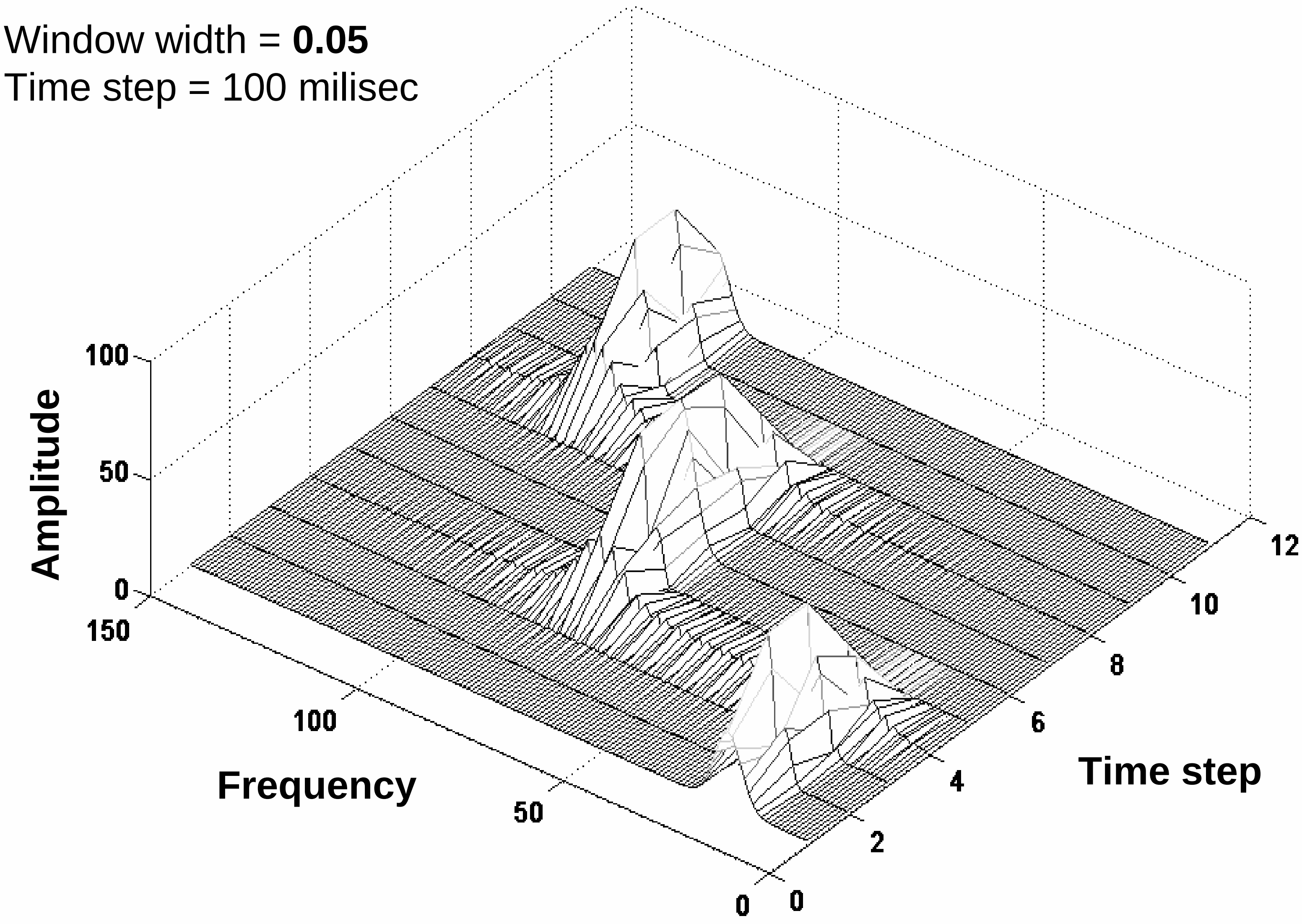

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
FT
70
60
50
40
30
20
10
0
0 50 100 150
X


FT
X


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
FT
35
30
25
20
15
10
5
0
0
50
100
150
X

time-frequency representation (TFR)

Window width = **0.05**
Time step = 100 milisec

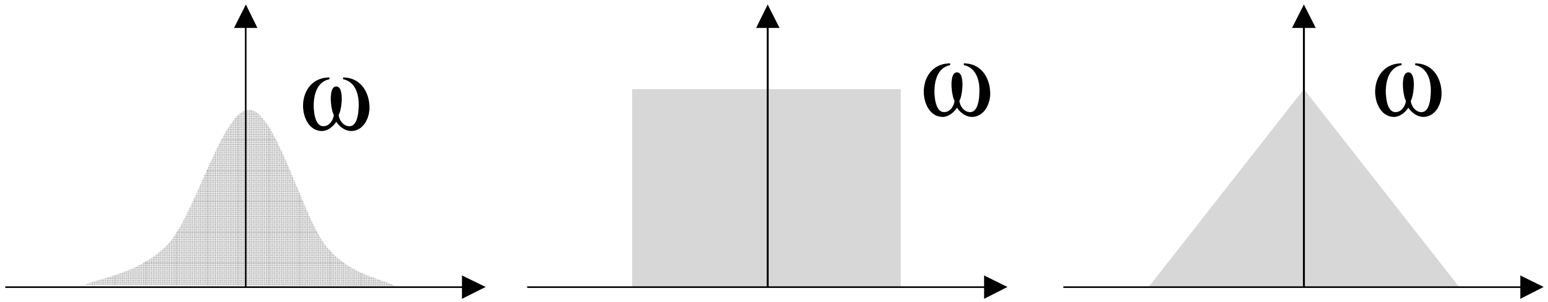


TF

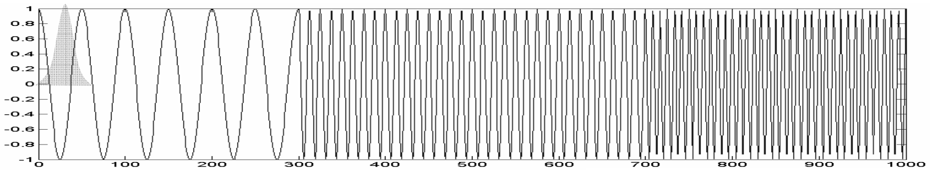
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bullet e^{-2\pi jft} dt$$

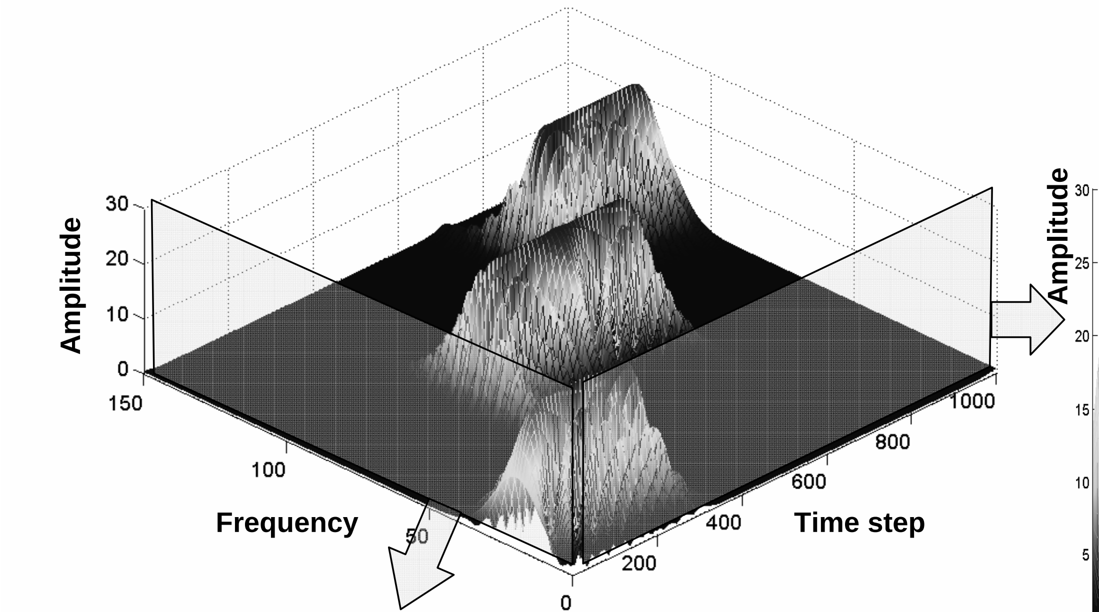
TFG

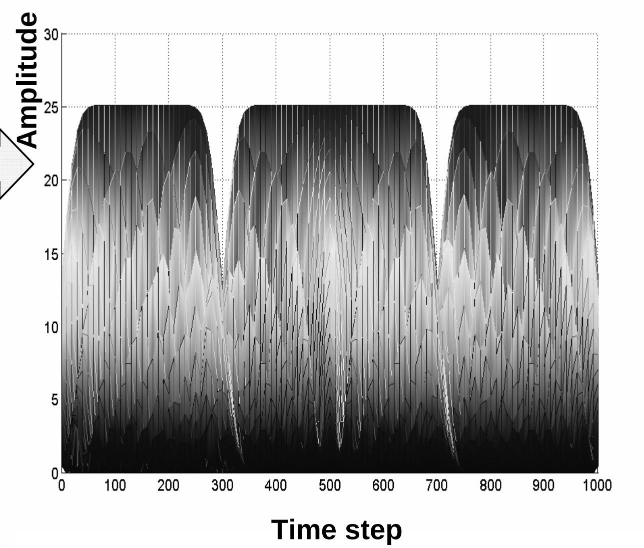
$$X(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) \bullet \omega(t - t')] \bullet e^{-2\pi jft} dt$$

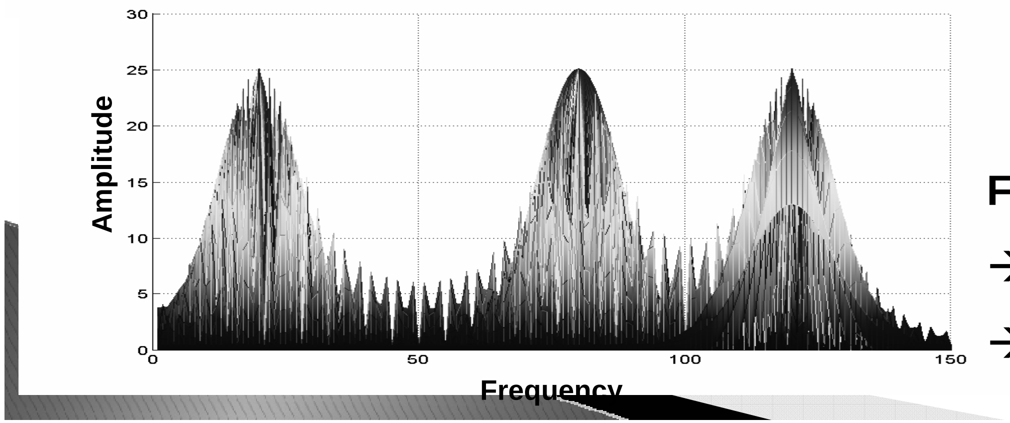


Window width = **0.02**
Time step = 10 milisec







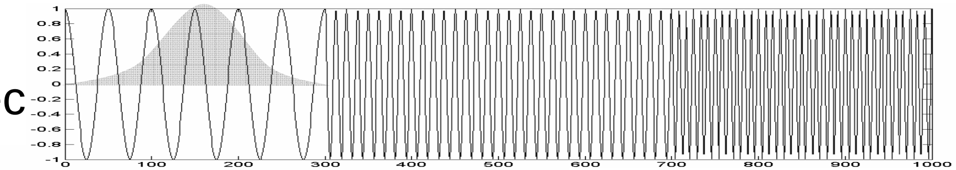


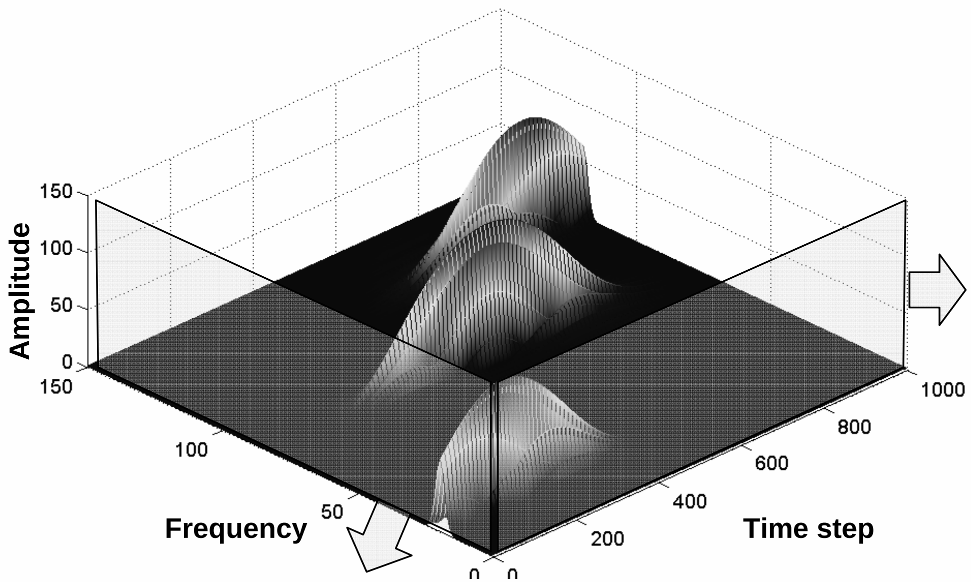
Fenêtre étroite :

→ bonne résolution temporelle

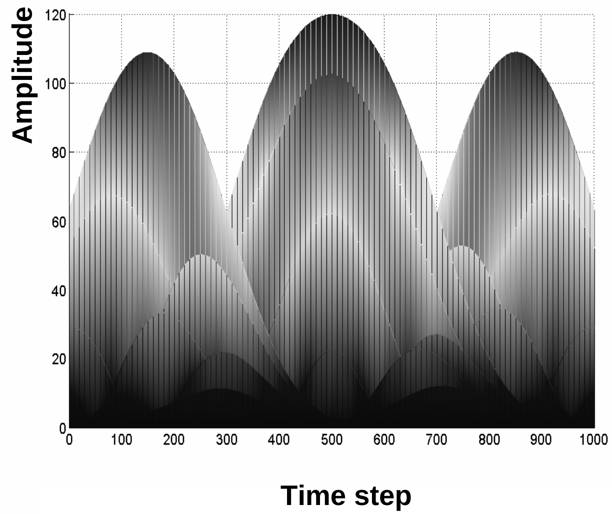
→ mauvaise résolution fréquentielle.

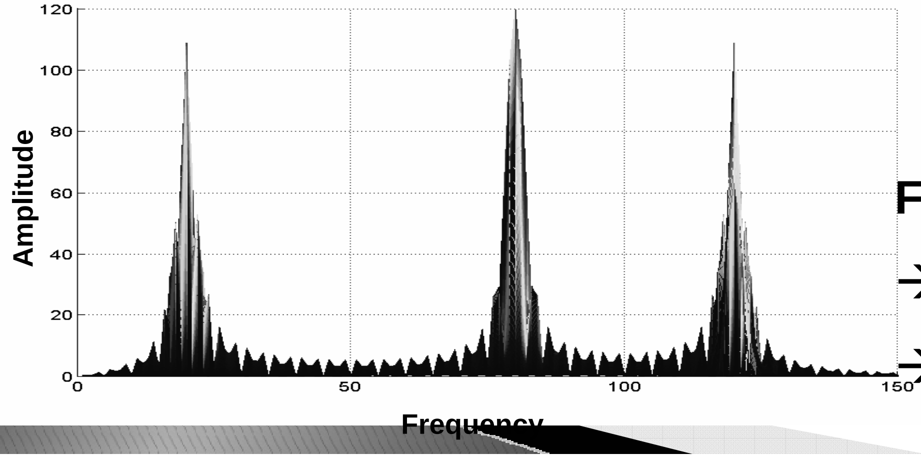
Window width = **0.1**
Time step = 10 milisec





retour





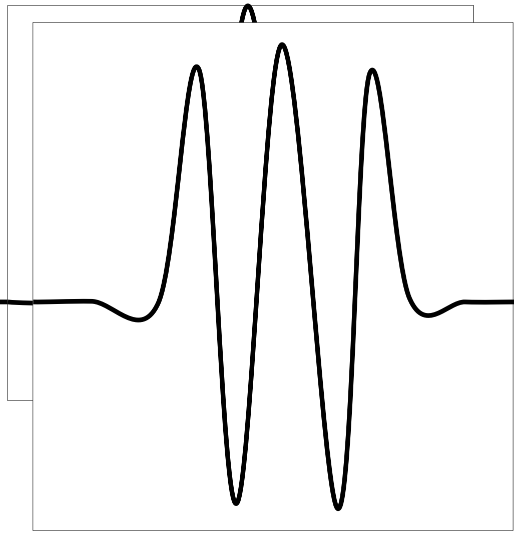
Fenêtre large :

→ bonne résolution fréquentielle

→ mauvaise résolution temporelle

Tranformée en Ondelette

Mexican hat

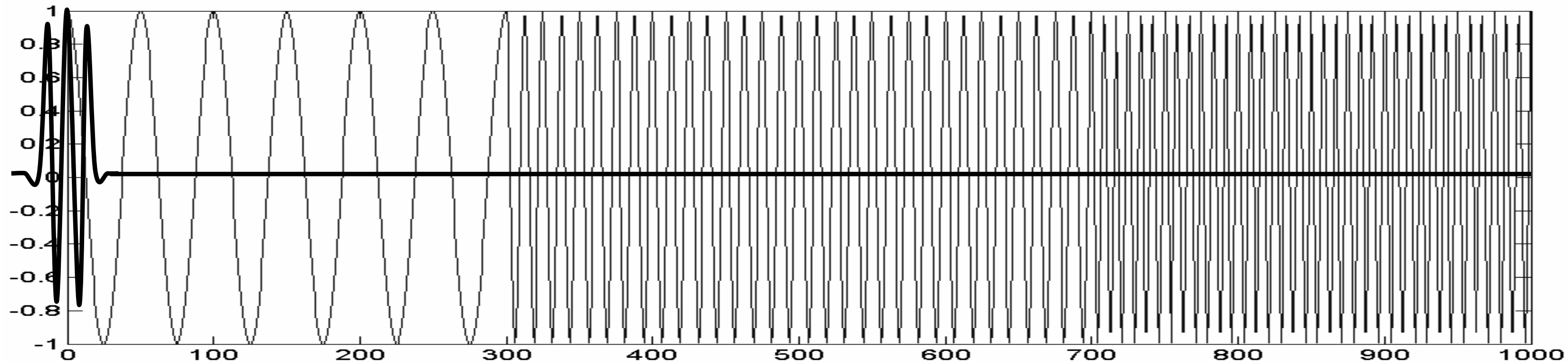


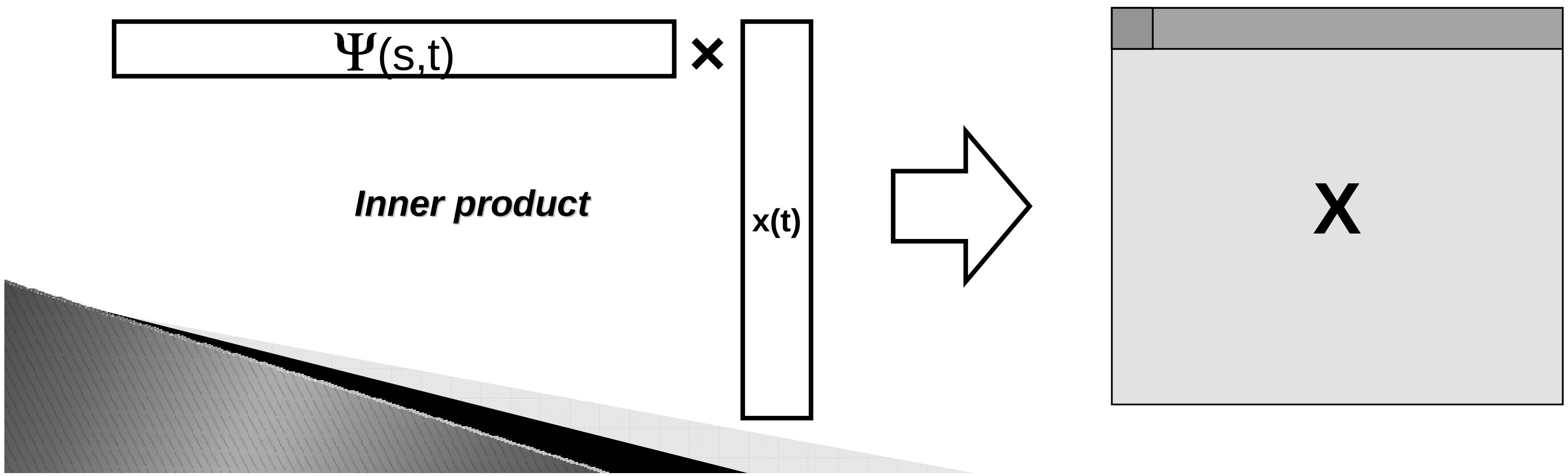
Morlet

$$\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}\left(e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1\right)\right)$$

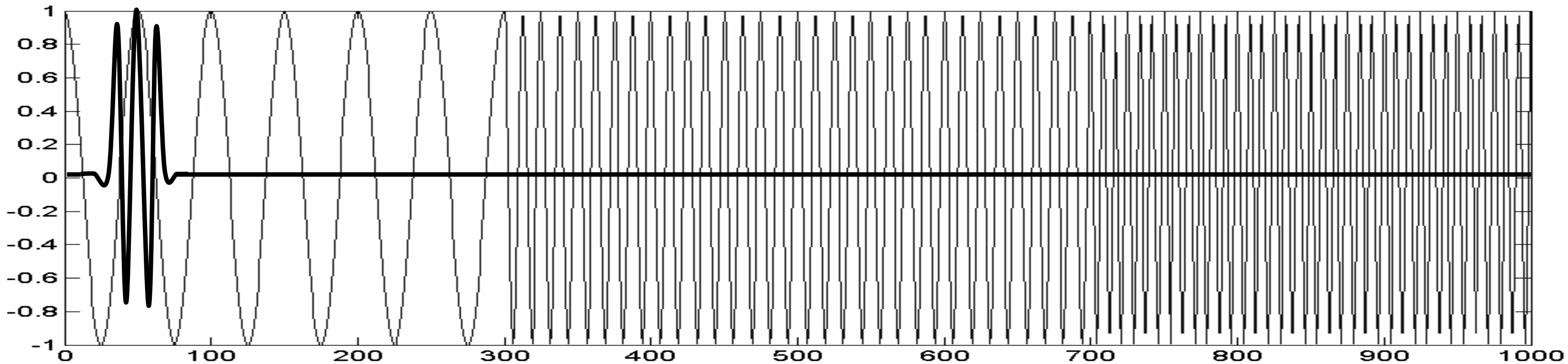
$$\omega(t) = e^{iat} e^{\frac{-t^2}{2\sigma}}$$

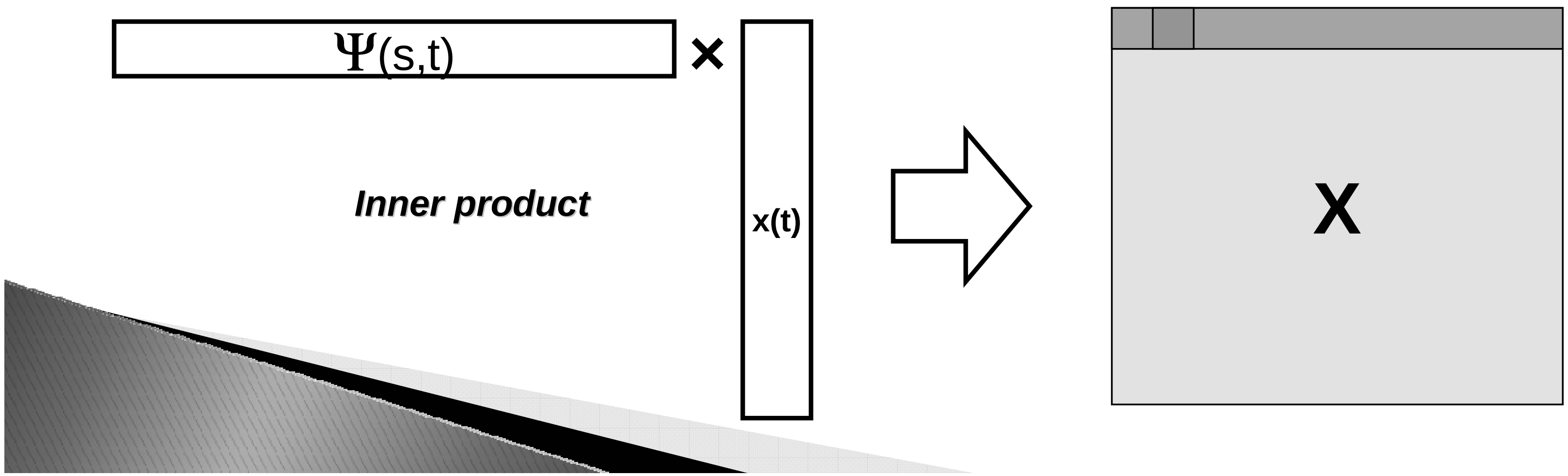
t = 0
Scale = 1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

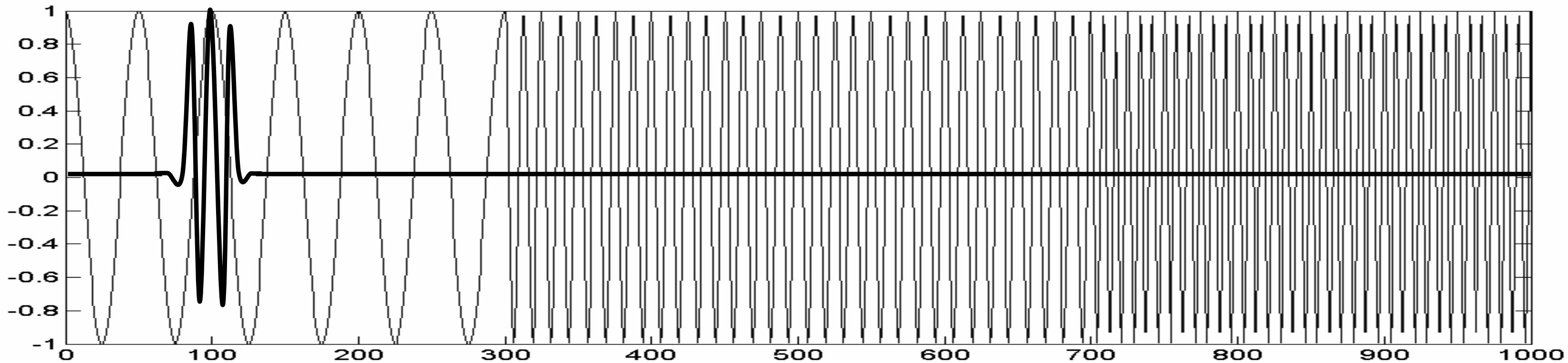

Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

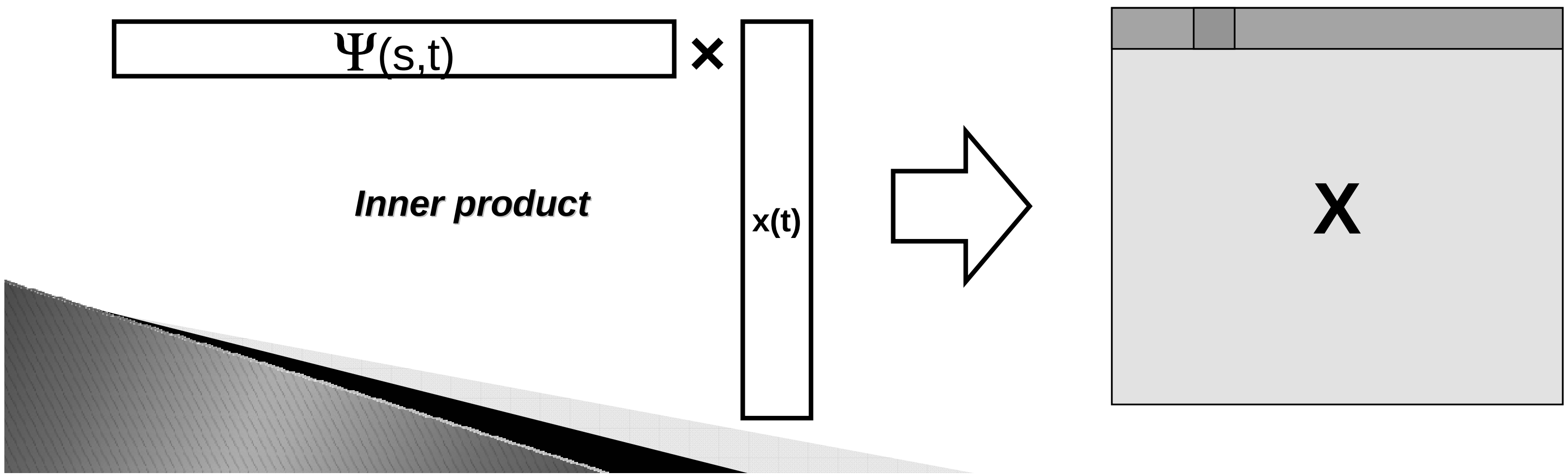
t = 50
Scale = 1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

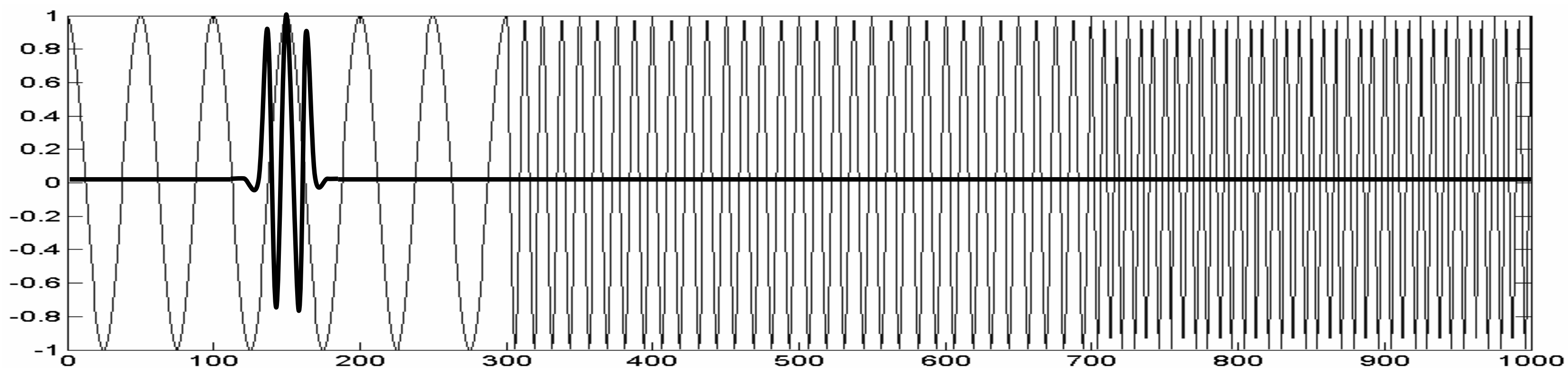

Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

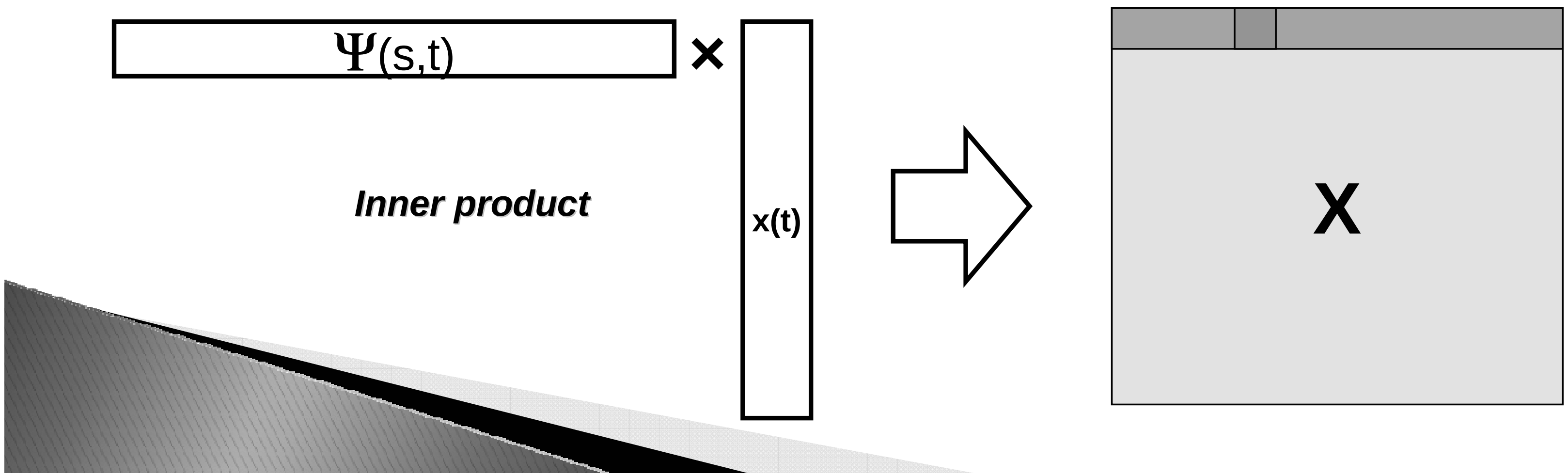
t = 100
Scale = 1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

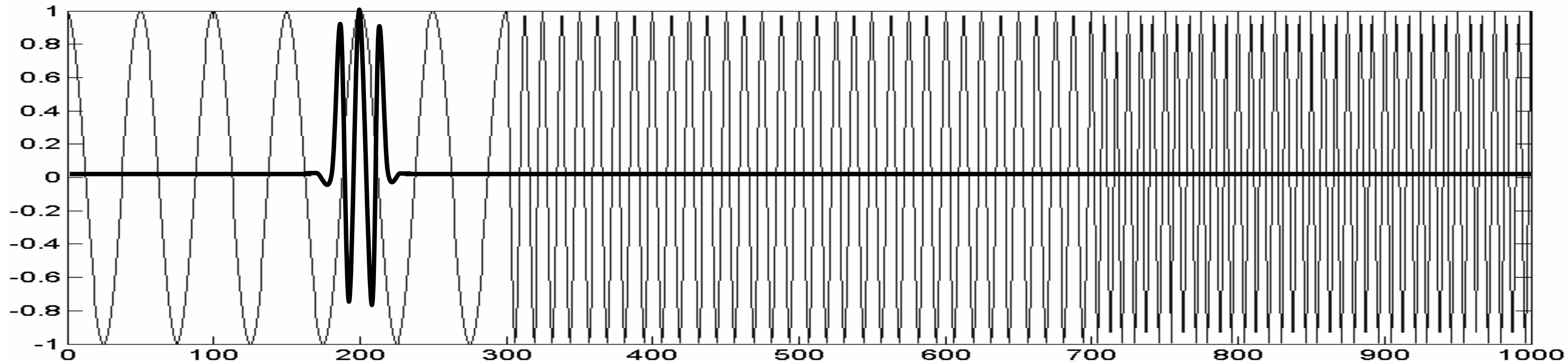

Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

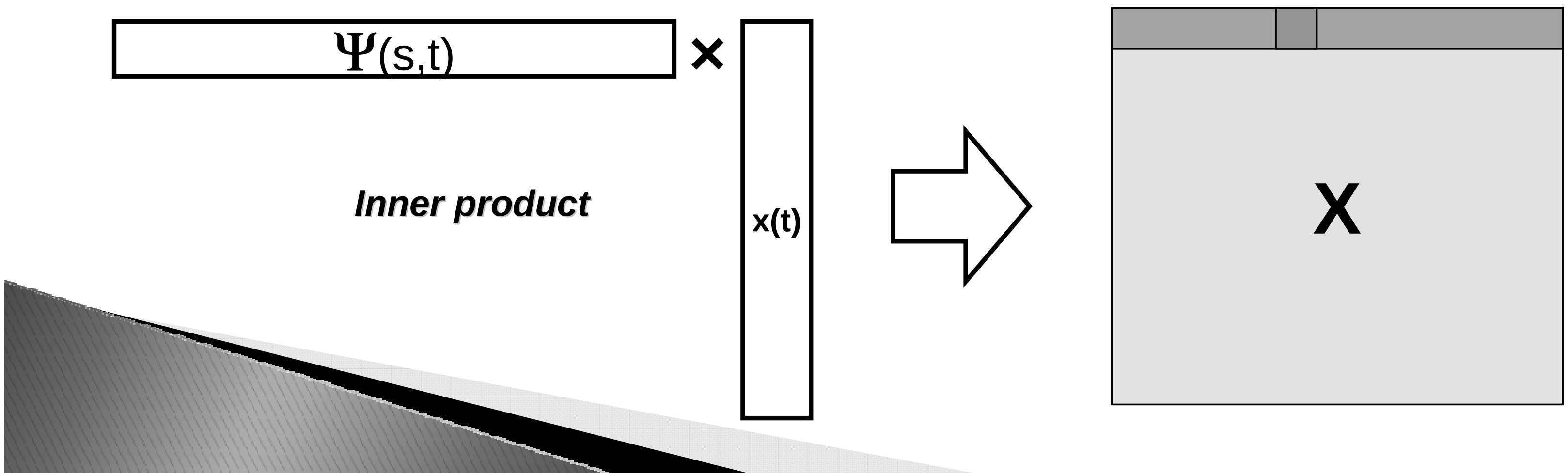
t = 150
Scale = 1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

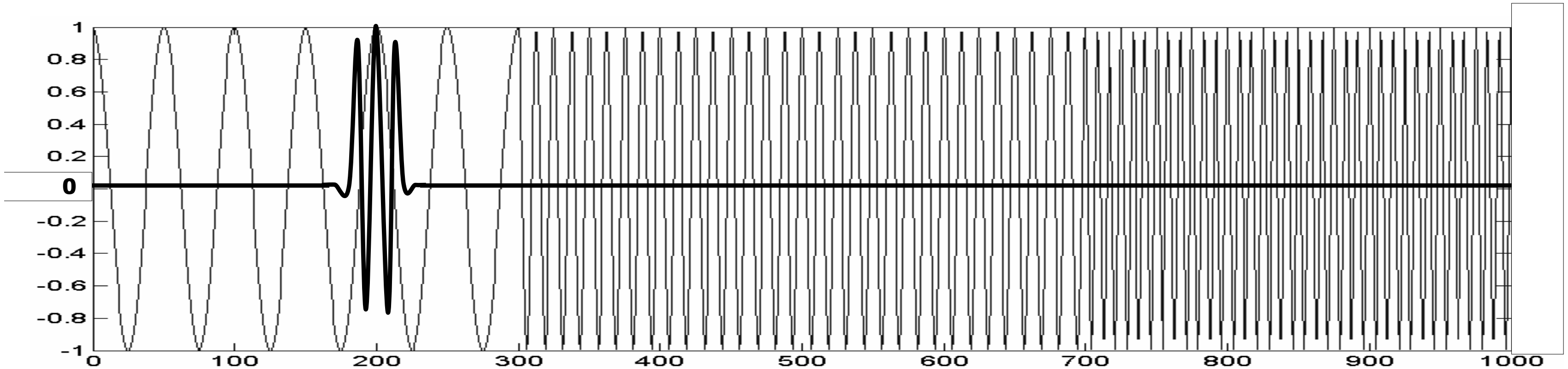

Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

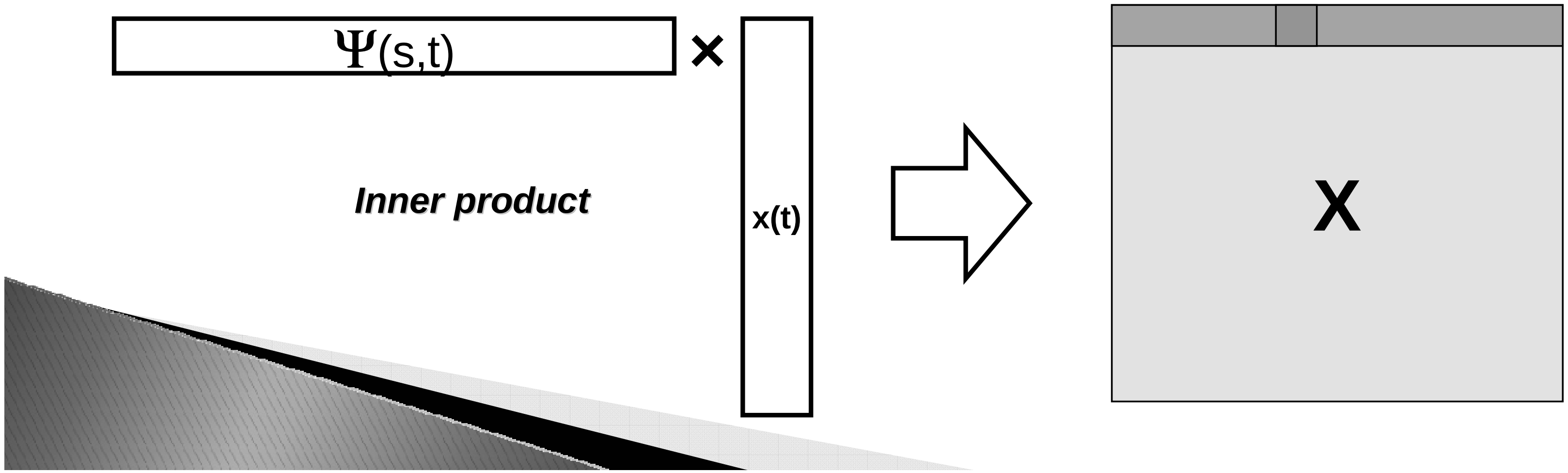
t = 200
Scale = 1





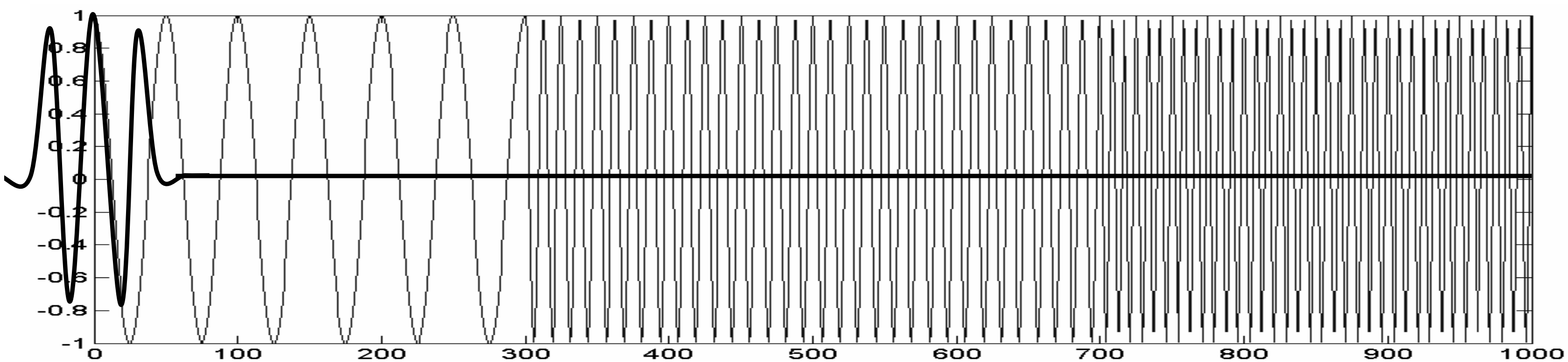
t = 200
Scale = 1

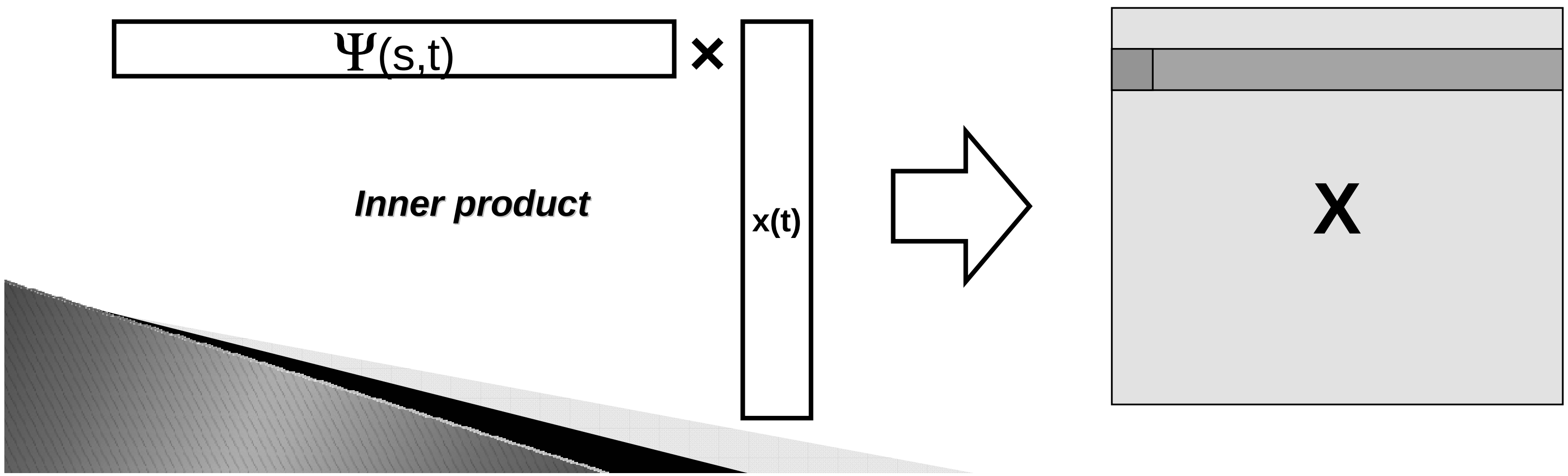

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

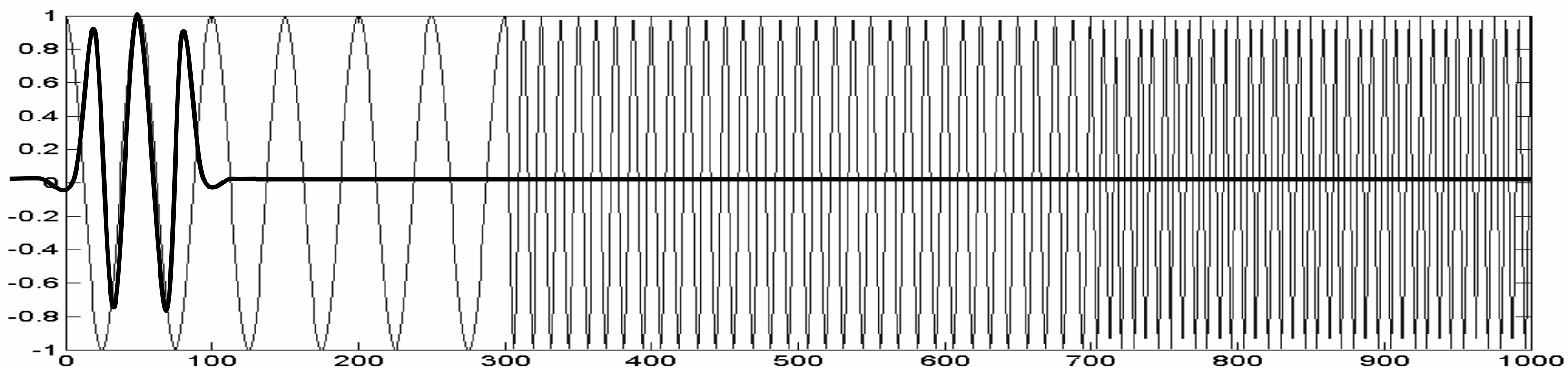
t = 0

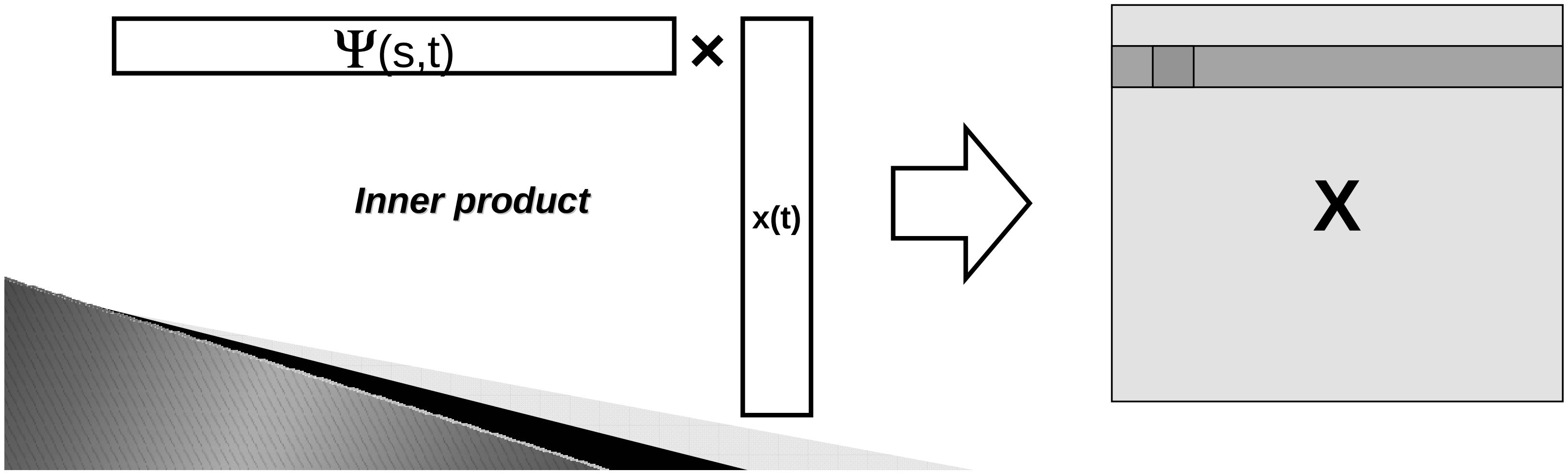
Scale = 10


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

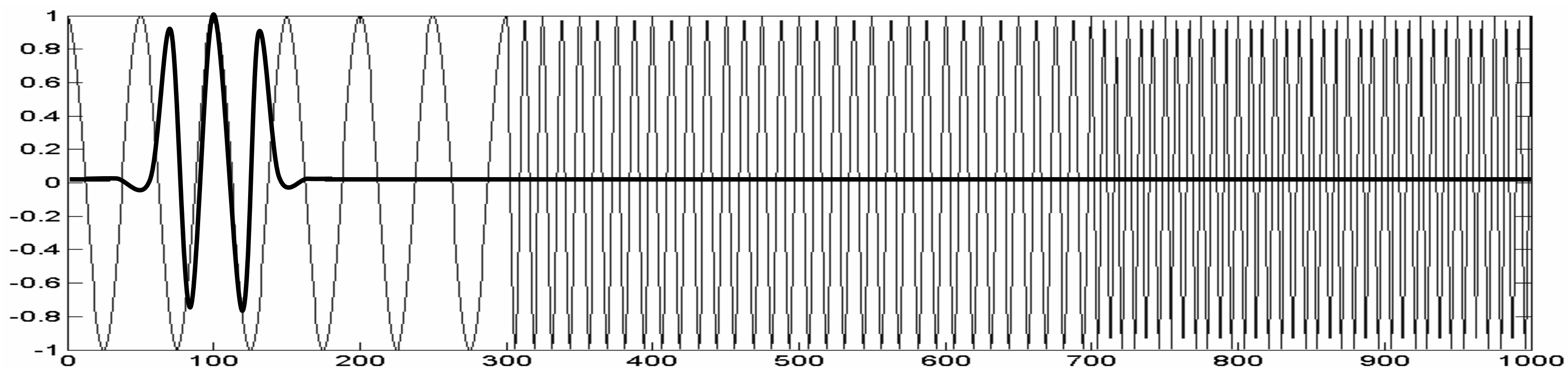

Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

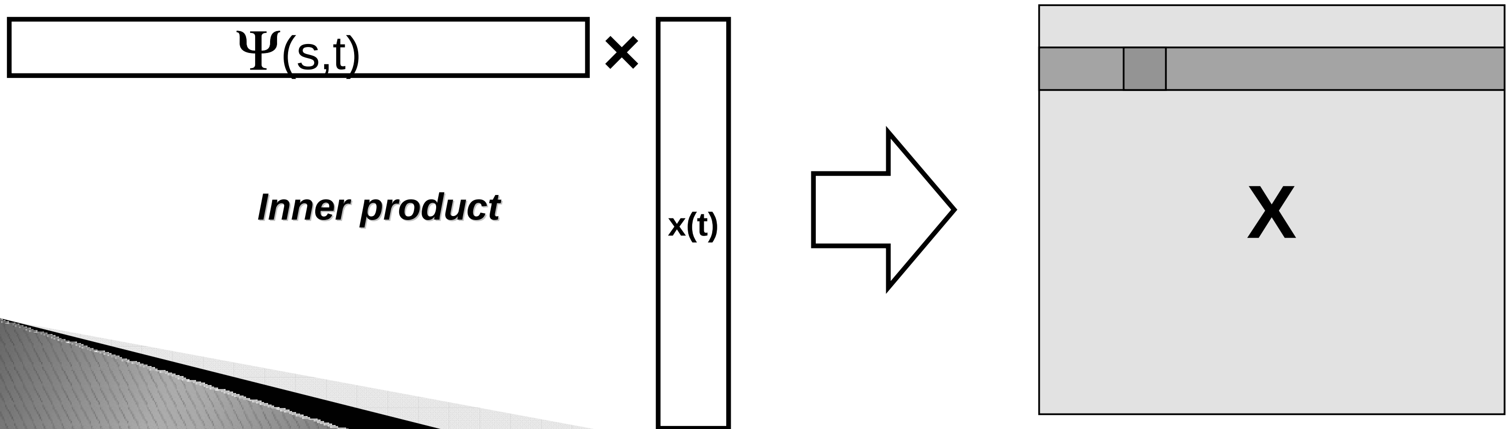
t = 50
Scale = 10


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

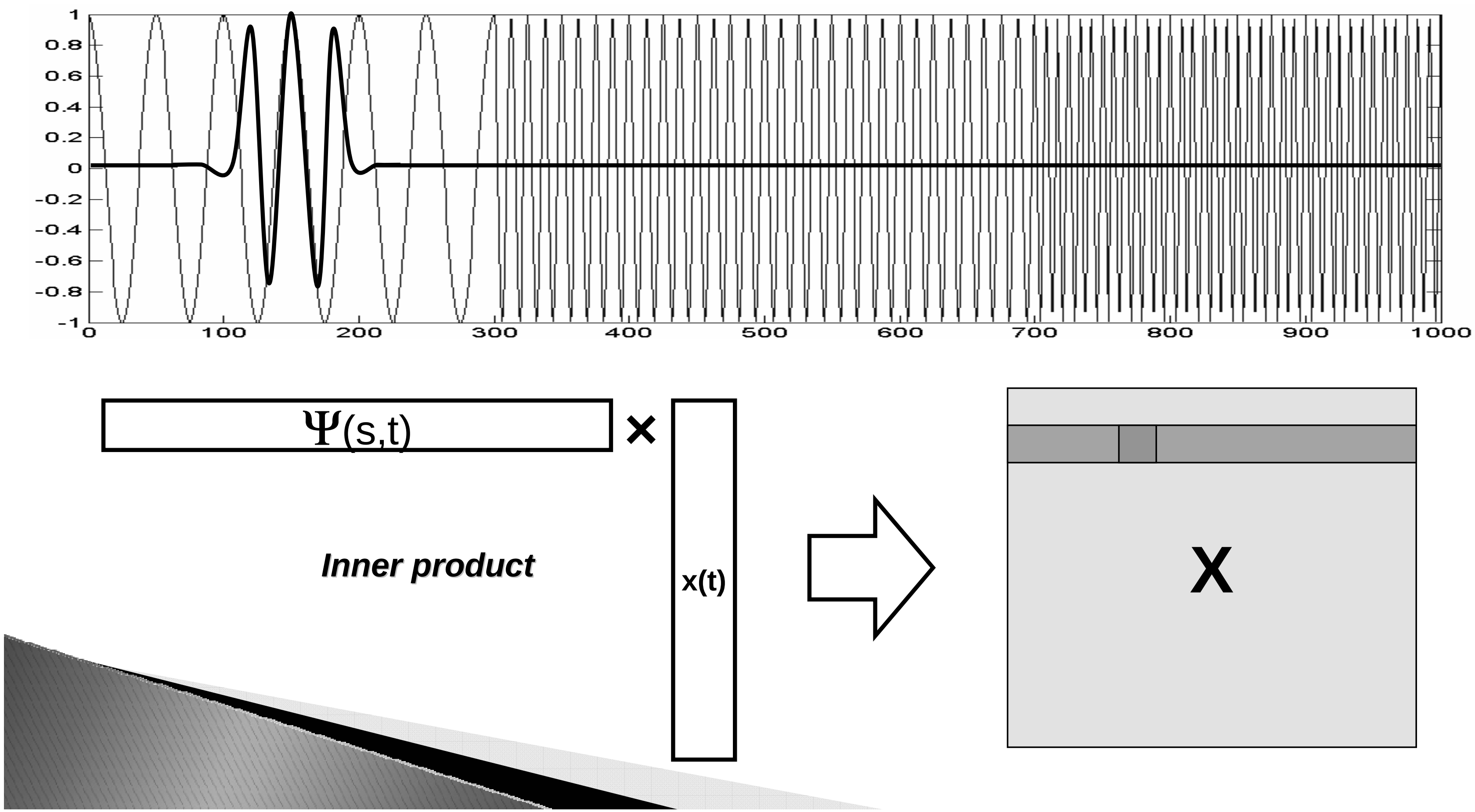

Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

t = 100
Scale = 10

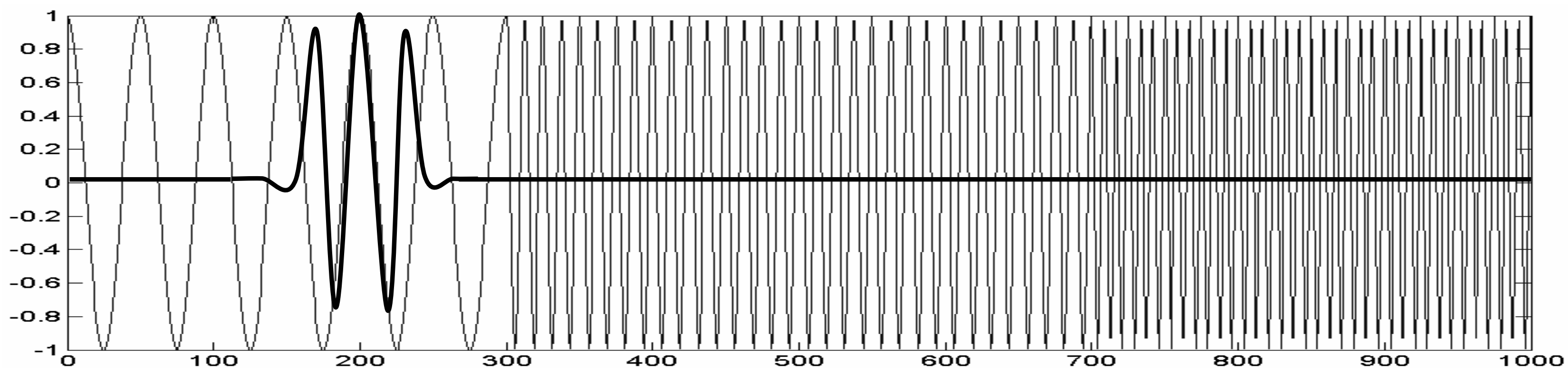


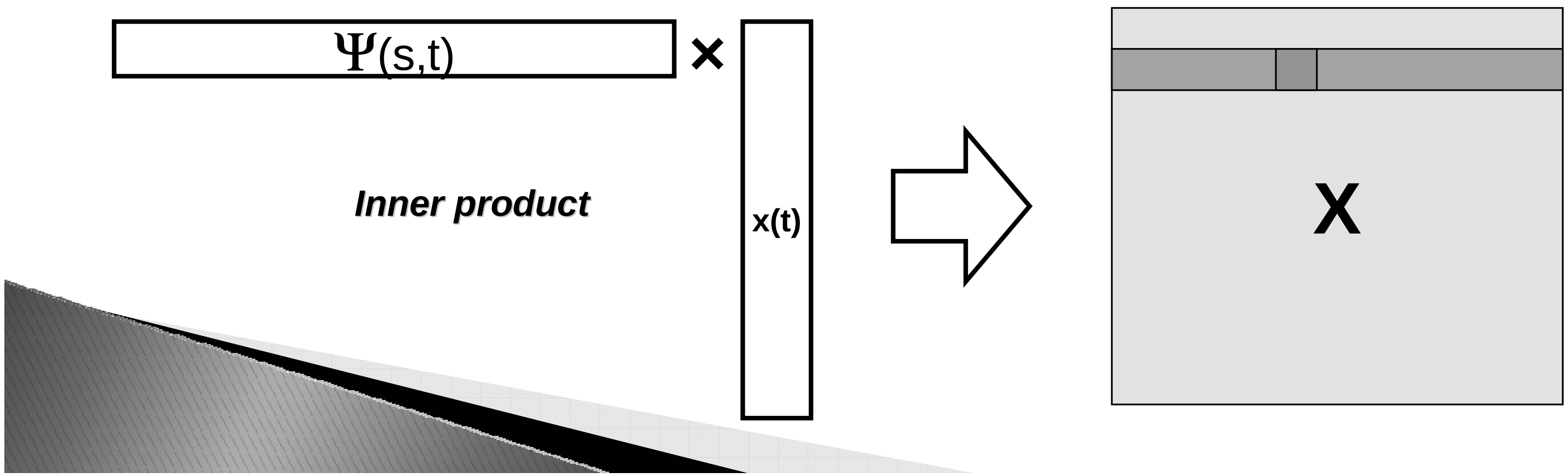


t = 150
Scale = 10

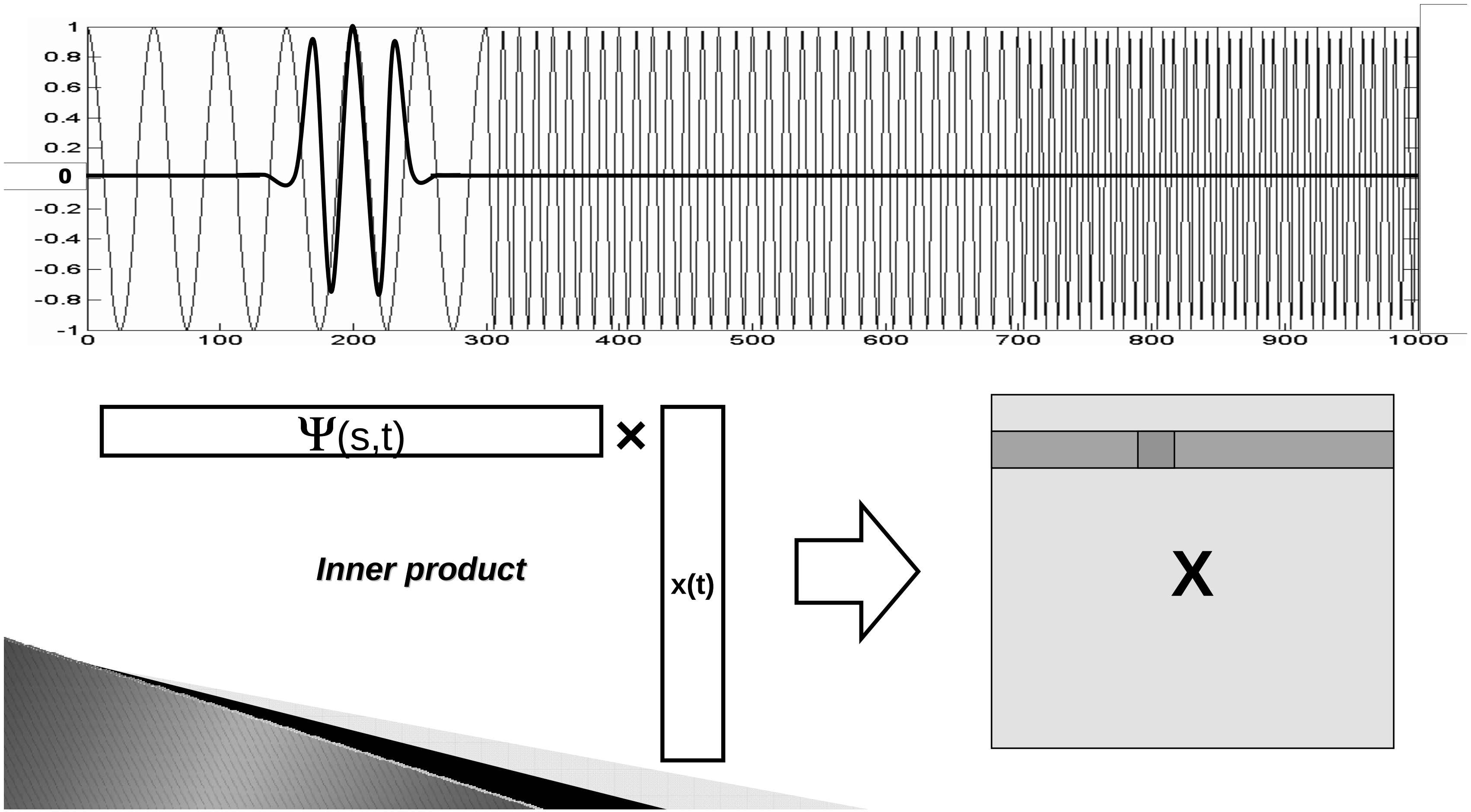


t = 200
Scale = 10

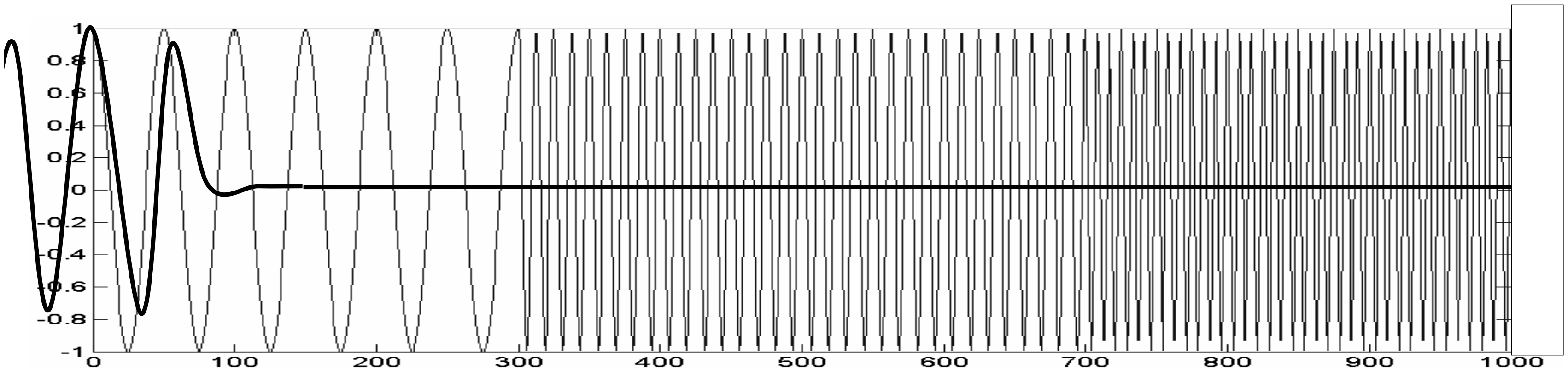


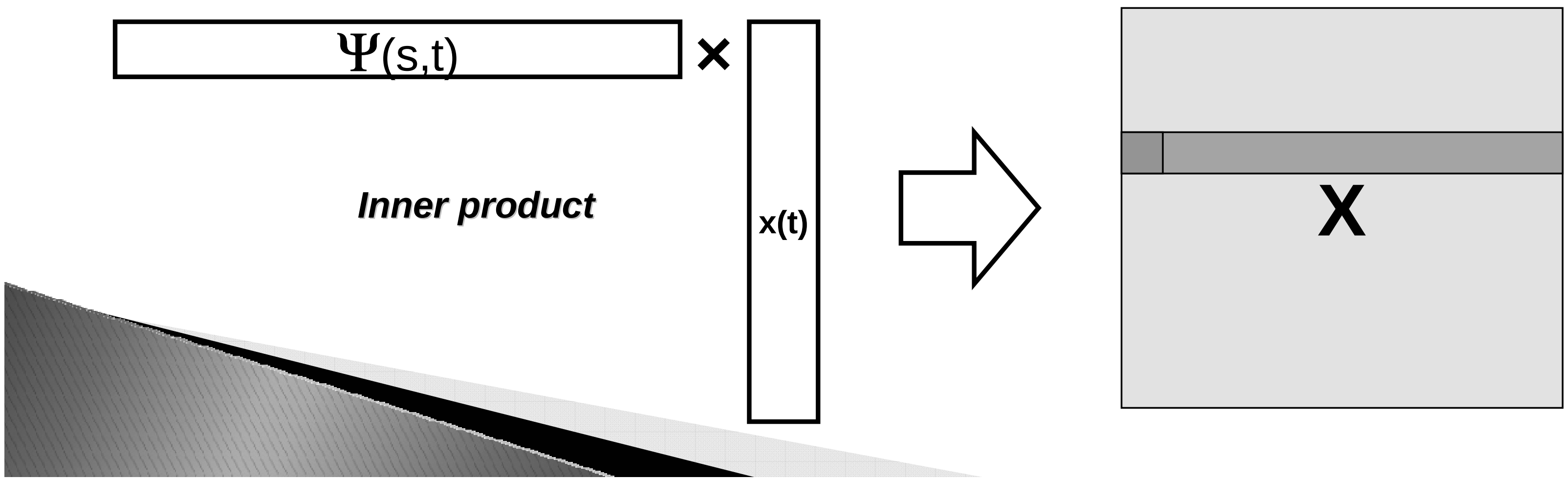


Scale = 10

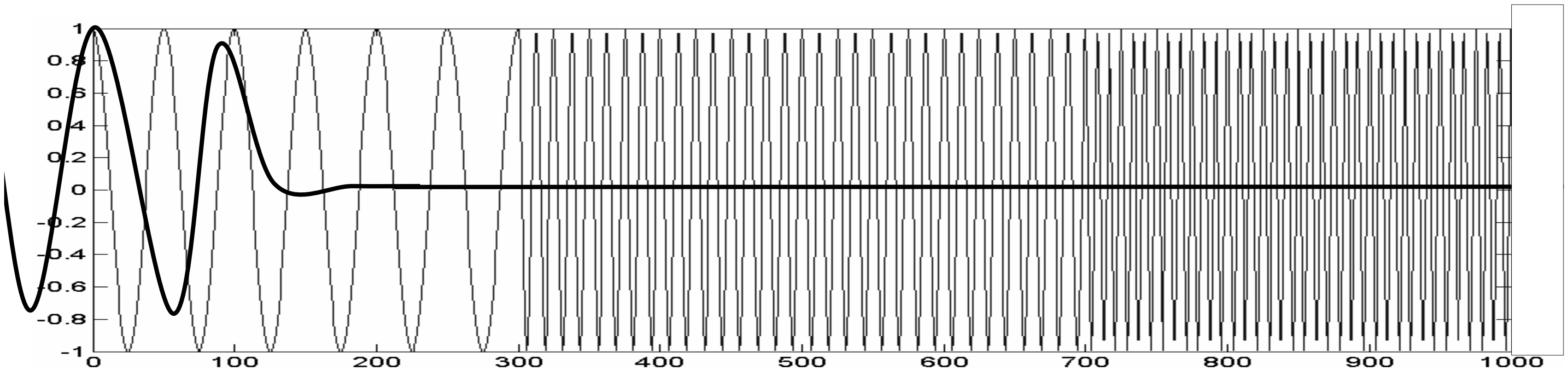

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
Ψ(s,t)
×
Inner product
x(t)
X

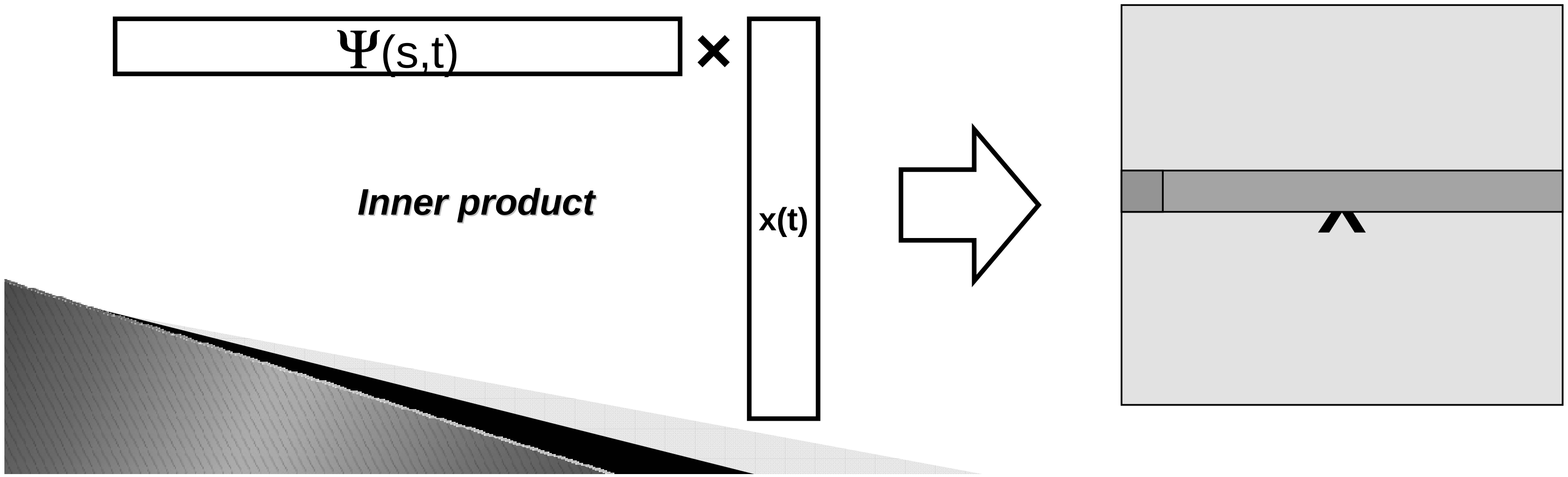
Scale = 20


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

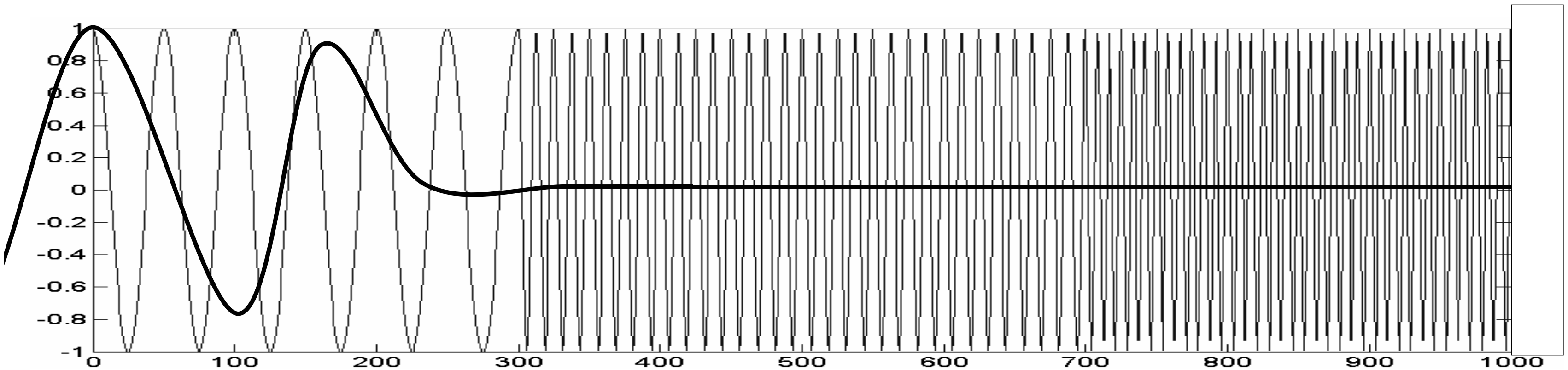

Ψ(s,t)
×
x(t)
Inner product
X

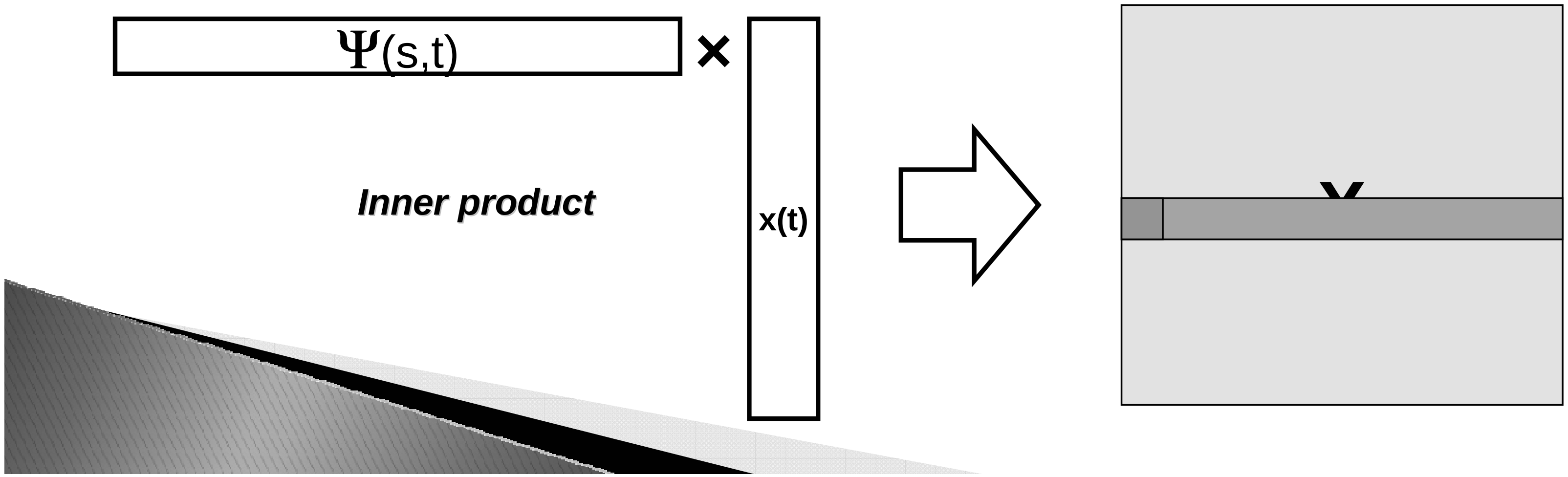
Scale = 30


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

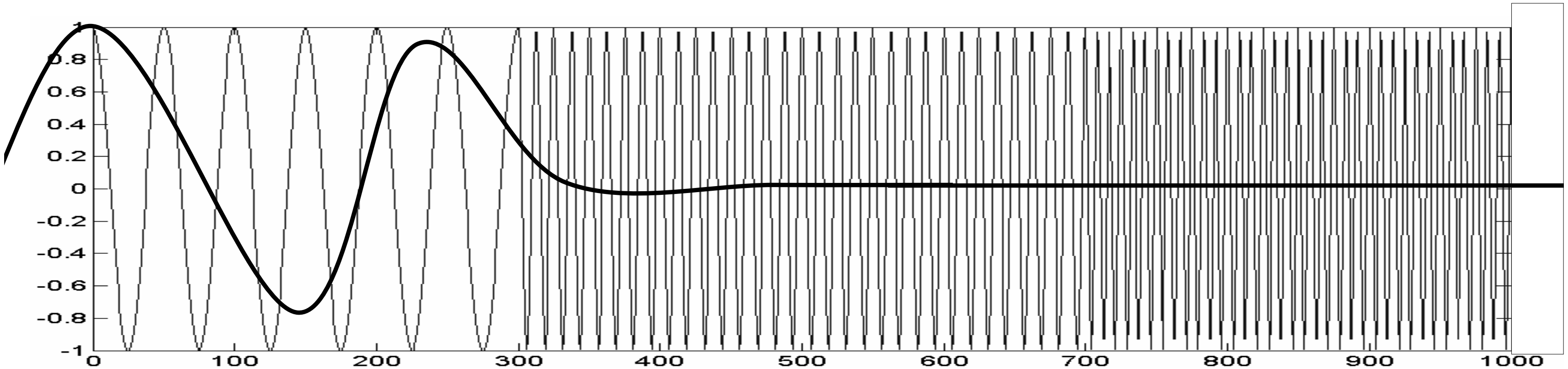

Ψ(s,t)
×
x(t)
Inner product

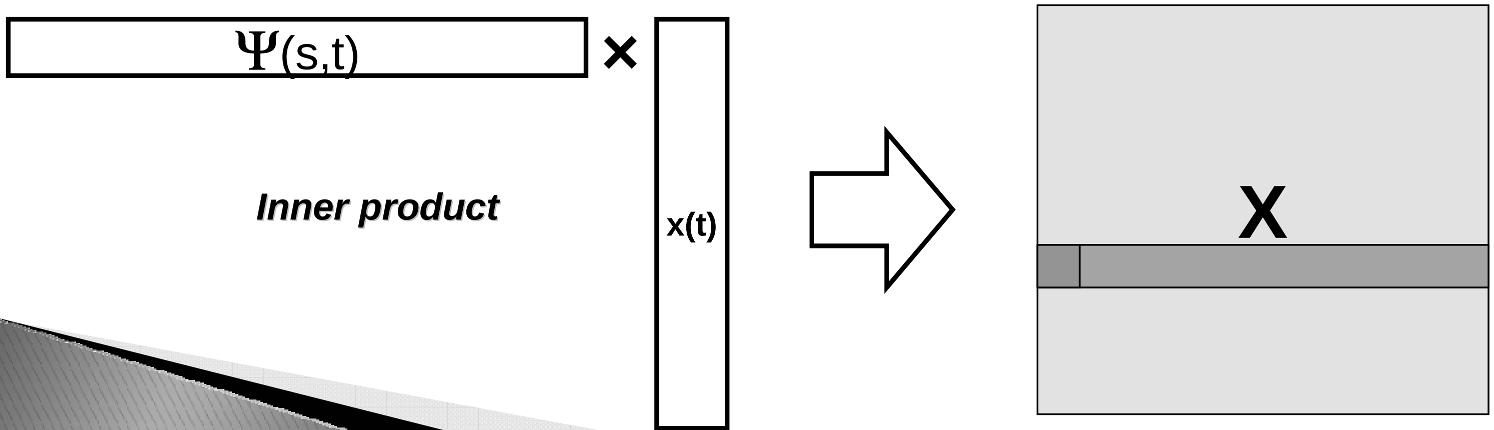
Scale = 40

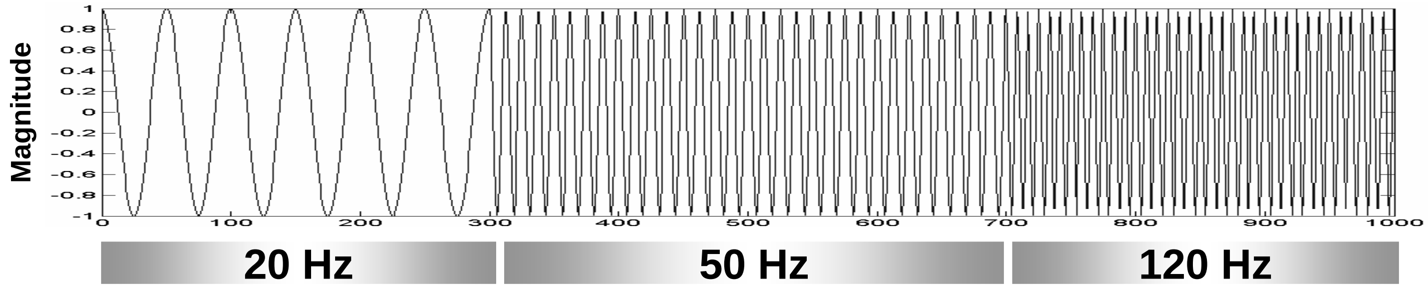

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


Ψ(s,t)
×
x(t)
Inner product

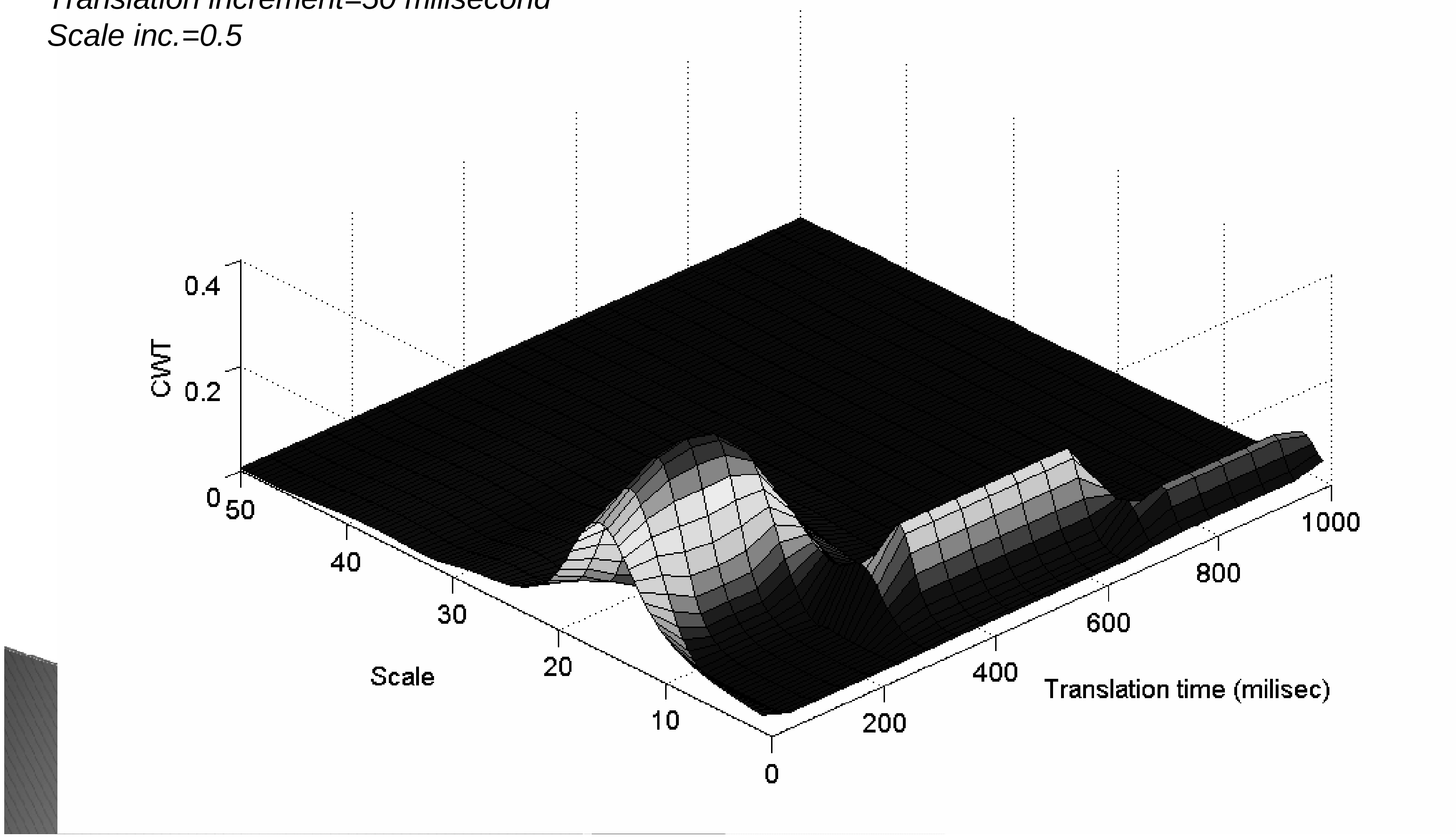
Scale = 50

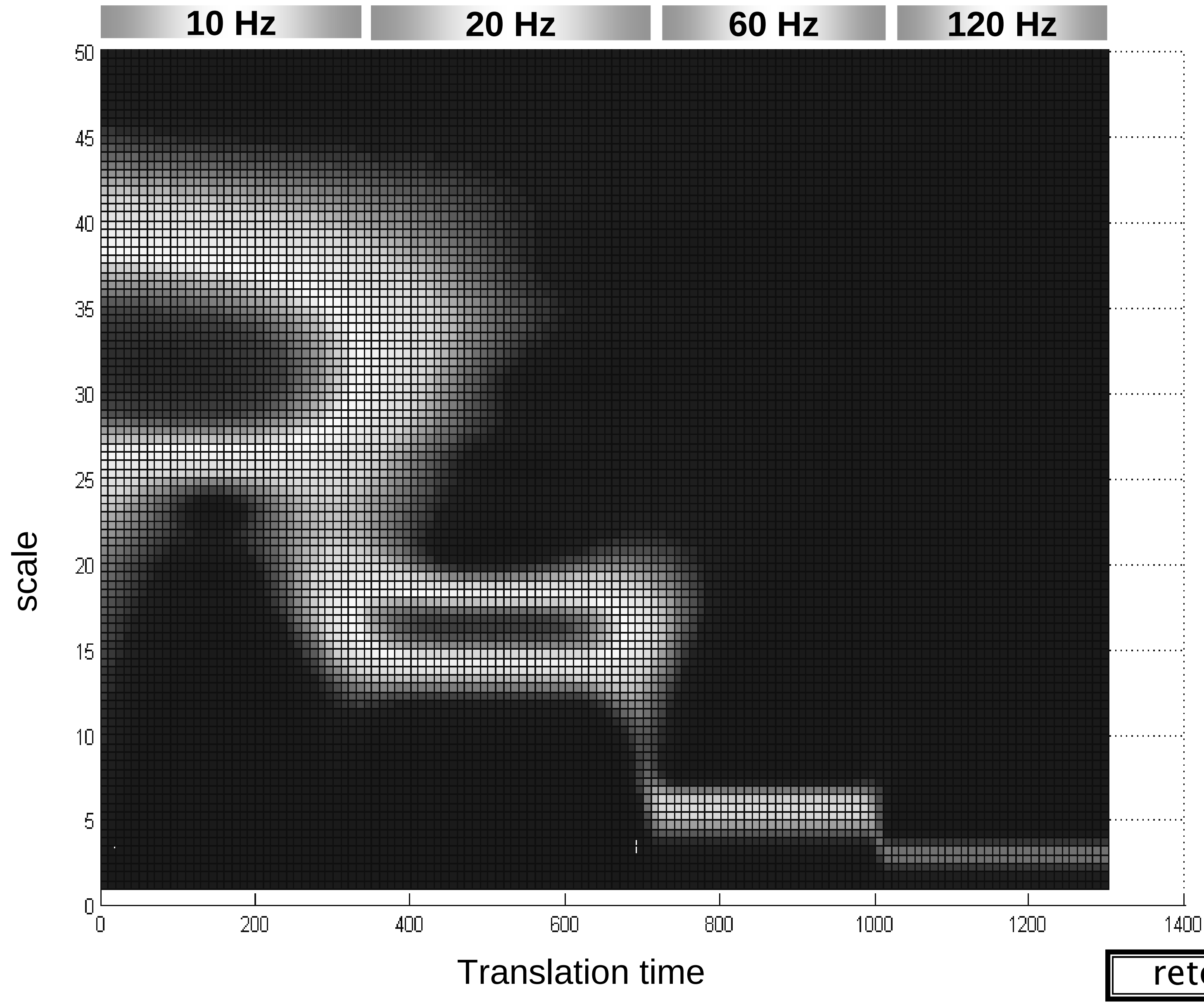

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


Ψ(s,t)
×
x(t)
Inner product
X



Translation increment=50 milisecond
Scale inc.=0.5




10 Hz
20 Hz
60 Hz
120 Hz
scale
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
Translation time

retour