IUT Perpignan	ELECTRICITE - ELECb	TD N°5

Les dipôles en régime sinusoïdal	J. BRESSON

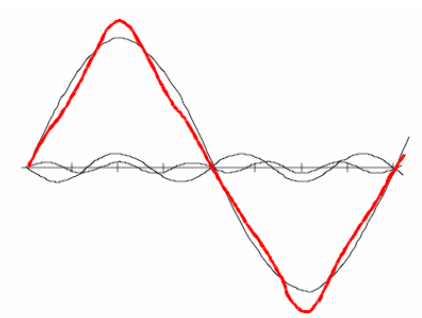
1. FONCTIONS PERIODIQUES ET FONCTIONS SINUSOÏDALES

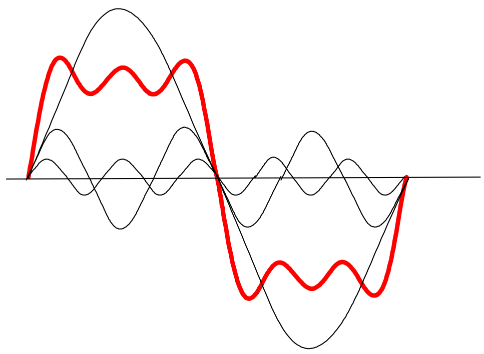
On démontre que toute fonction f(t), périodique de période T et satisfaisant à certaines conditions de continuité et de dérivabilité, peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales dite « série de FOURIER » :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

avec : $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ $\quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt$ $\quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt$

Ci-dessous quelques exemples :





Triangle *Carré*

(reconstitué à partir des 3 premiers termes de la série)

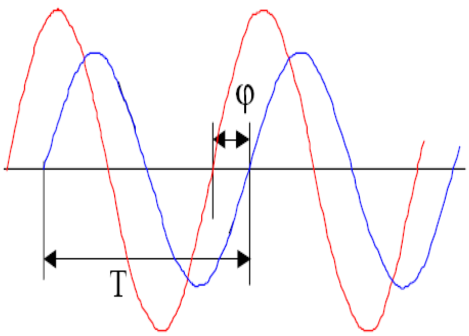
(animation java : http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Fourier/fourier1.html)

La réponse d'un système linéaire à une fonction périodique est la somme des réponses aux fonctions sinusoïdales (harmoniques) constituant le développement en série de Fourier de cette fonction. C'est notamment pour cette raison que l'on s'intéresse au comportement d'un système suite à une sollicitation sinusoïdale.

2) REPRESENTATION DES GRANDEURS SINUSOÏDALES

a) Définitions

Soit la grandeur sinusoïdale (courant, tension, flux, …) $h(t) = H\sin(\omega t + \varphi)$



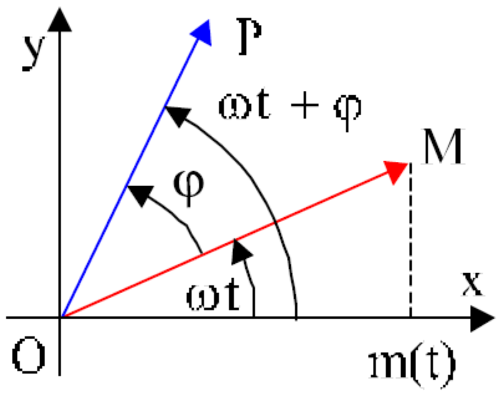
- h(t) est sa **valeur instantanée**
- H est sa **valeur maximale** ou **valeur crête**
- ω (rd/s) est sa **pulsation** ou **vitesse angulaire**, reliée à sa **période** T(s) par la relation $\omega = 2\pi / T$ et à la **fréquence** f(Hz) par $\omega = 2\pi f$ ainsi T=1/f
- φ est sa **phase** à l'origine
- sa **valeur moyenne** <H> peut être calculée par la relation :

  $< H(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T h(t)dt$ et correspond au premier terme de la série de Fourier. Dans le cas d'un signal périodique symétrique par rapport à l'axe des temps, sa valeur moyenne est nulle. C'est le cas du signal sinusoïdal où : $V_{moy} = 0$.

- sa **valeur efficace** Heff est donnée par la relation : $H_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T h^2(t)dt} = \sqrt{<H^2(t)>}$ correspond à la valeur que devrait avoir un signal continu pour produire les mêmes effets thermiques que le signal considéré.

  Pour une grandeur sinusoïdale, $H_{eff} = \frac{H}{\sqrt{2}}$

b) Représentation de Fresnel



Les 2 signaux précédents peuvent être représentés dans le plan de Fresnel par 2 vecteurs déphasés d'un angle (et tournant à la même vitesse angulaire ω (rd/s).
La longueur du vecteur correspond à la valeur maximale de la tension, sa projection sur l'axe des x (ou des y) correspond à la valeur instantanée en sin (ou en cos).

Ainsi pour faire la somme des 2 signaux sinusoïdaux on fait la somme vectorielle de leurs vecteurs représentatifs.

(animation java : http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Fourier/fourier1.html)

c) Représentation complexe

Le plan complexe est analogue au plan de Fresnel. Une grandeur complexe G y sera notée G* et son complexe conjugué $\overline{G^*}$

Sachant que : $j^2 = -1 \quad ; j = e^{j\pi/2}$ ainsi **j correspond à un déphasage de** $+\pi/2$

On notera la grandeur complexe : $G^* = \Re(G^*) + j\Im(G^*)$ sous sa forme cartésienne

0n rappelle : $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ et $G^* = |G|e^{j\varphi}$ sous sa forme polaire

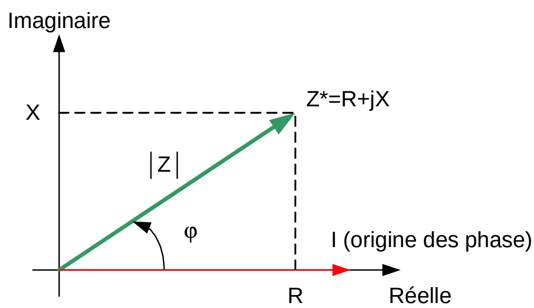
Ainsi à l'intensité $i(t) = I\cos\omega t$ *, on fait correspondre* $i^*(t) = Ie^{j\omega t}$

A la tension $v(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$, *on fait correspondre* $v^*(t) = Ve^{j(\omega t + \varphi)}$

- **Impédance complexe : (en prenant l'intensité comme origine des phases)**

$Z^* = v^*/i^* = Ze^{j\varphi}$ soit : $Z^* = R + jX$ où R est une **résistance** et X la **réactance**

Le module de l'impédance est : $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$ et $\varphi = \mathrm{arctg}\, X/R$



- **Admittance complexe :**

On définit également l'admittance comme le rapport inverse de l'impédance : $Y^* = \frac{1}{Z^*} = G + jB$ où G est une **conductance** et B une **susceptance**

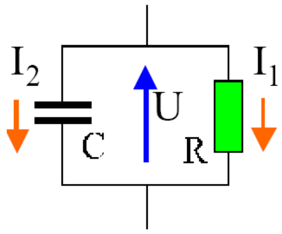
3) DIPOLES LINEAIRES EN REGIME SINUSOÏDAL

- **Résistance :** $v(t) = R.i(t)$ d'où $Z_R = R$ Dans une résistance, le courant est en phase avec la tension.

- **Condensateur :** $v(t) = \frac{1}{jC\omega} i(t)$ d'où $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$

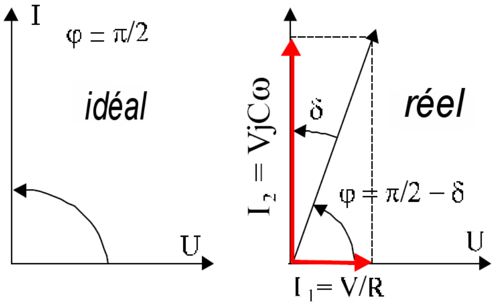
Dans un condensateur idéal, le courant est en avance de $\pi/2$ sur la tension.

Dans un **condensateur réel**, l'isolement du diélectrique n'étant jamais parfait, il apparaît de légers courants de fuite symbolisés par une résistance R placée en parallèle avec le condensateur idéal.



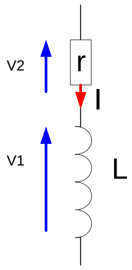
L'admittance équivalente vaut : $Y_{équi} = \frac{1}{R} + jC\omega$

Le courant I_1 dans la résistance est en phase avec la tension V, par contre le courant I_2 est en avance de $\pi/2$ sur V.
On en déduit **l'angle de perte** : $tg\delta = 1/RC\omega$
Pour un condensateur de bonne qualité, cet angle est petit.

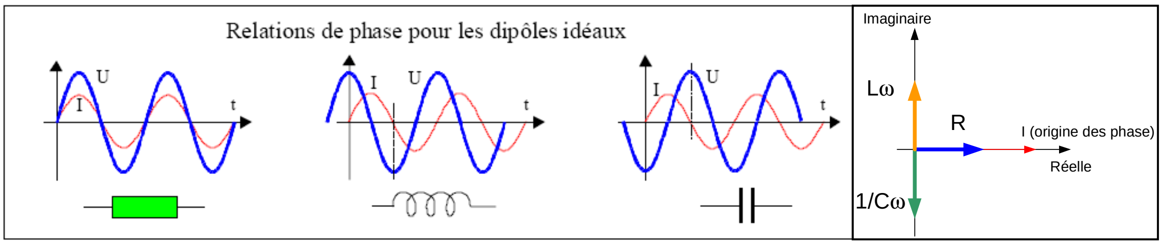


- **Inductance :** $v(t) = JL\omega i(t)$ soit $Z_L = jL\omega$

Dans une inductance pure, le courant est en retard de $\pi/2$ sur la tension.



Une inductance réelle présente toujours une résistance (r due aux fils du bobinage) et une capacité parasite. Cette dernière est minimisée en bobinant les fils perpendiculairement (nids d'abeille). Ainsi, on représente une inductance réelle par une résistance de faible valeur en série avec une inductance pure. L'impédance équivalente vaut : $Z_{équi} = r + jL\omega$

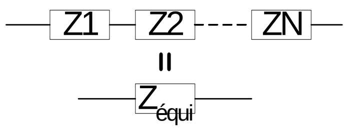


4) ASSOCIATION DE DIPOLE EN REGIME SINUSOÏDAL

Par analogie avec les association de résistances, on démontrerait que :

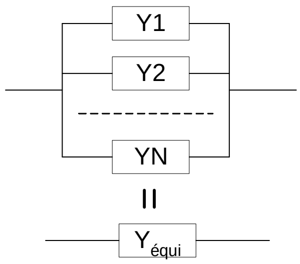
- Lorsque des dipôles sont en série, l'impédance équivalente est égale à la somme des impédances

$$Z_{équi} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_N$$



- Lorsque des dipôles sont en parallèle, l'admittance équivalente est égale à la somme des admittances

$$Y_{équi} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_N$$



5) CONCLUSION

Dans le cas du circuit R,L ,C du chapitre précédent :

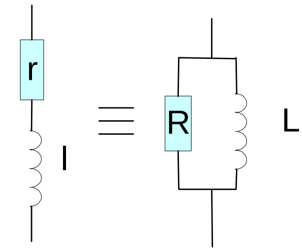
Régime transitoire	Régime permanent sinusoïdal
$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt + L\frac{di(t)}{dt} = V\cos\omega t$	$RI + \frac{I}{jC\omega} + jL\omega I = V$

IUT Perpignan	ELECTRICITE - ELECb	TD N°5

Les dipôles en régime sinusoïdal	J. BRESSON

EXERCICES

1. Equivalence série-parallèle (inductance)

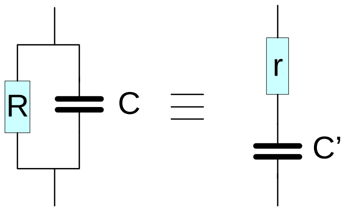


Montrer qu'en régime sinusoïdal, ces deux circuits sont équivalents.

- Exprimer L en fonction de l et de $Q=l\omega/r$ puis R en fonction de r et de Q.

AN : l=200mH ; $r=10\Omega$; $\omega=10^3$ rd/s

2. Equivalence série-parallèle (capacité)

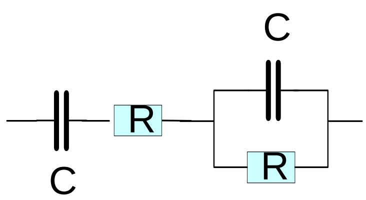


Montrer qu'en régime sinusoïdal, ces deux circuits sont équivalents.

- Exprimer C' et r en fonction de C et R.

AN : C=1µF ; $r=10^9\Omega$; $\omega=10^3$ rd/s

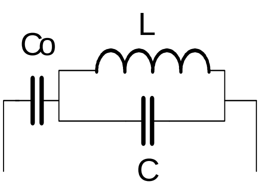
3. Diagramme d'impédance

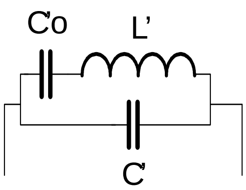


Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale.

- Calculer son impédance complexe Z=X+jY
- Donner l'allure des courbes $X(\omega)$ et $Y(\omega)$
- Le vecteur OP est l'image de Z. Dans le plan complexe , tracer le lieu du point P quand ω varie.

4. Modèles d'un quatz

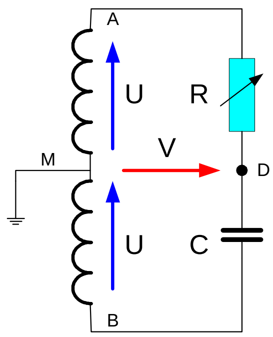




En régime sinusoïdal, déterminer l'impédance complexe des deux circuits.

- Déterminer les pulsations ω_R et ω_A pour lesquelles le module de l'impédance est nul ou infini.
- Montrer l'équivalence des deux circuits en exprimant C'o, C' et L' en fonction de Co, C et L.

5. Circuit déphaseur passif

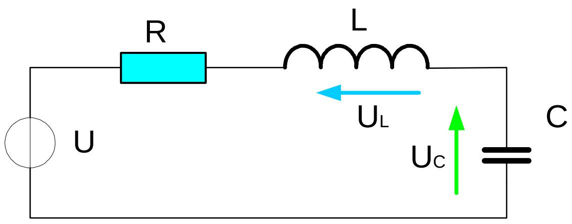


Le point milieu M du secondaire d'un transformateur est relié à la masse.
Les tensions V_{AM} et V_{MB} sont égales et opposées.

- Montrer que si $U = E\sin\omega t$ on a : $V_{DM} = F\sin(\omega t - \varphi)$
- Exprimer V_{DM} et φ en fonction de E,R,C, et ω.
- Comment varie φ quand R varie entre 0 et 50kΩ, si C=5µF et ω =100rd/s.

6. Circuit RLC série

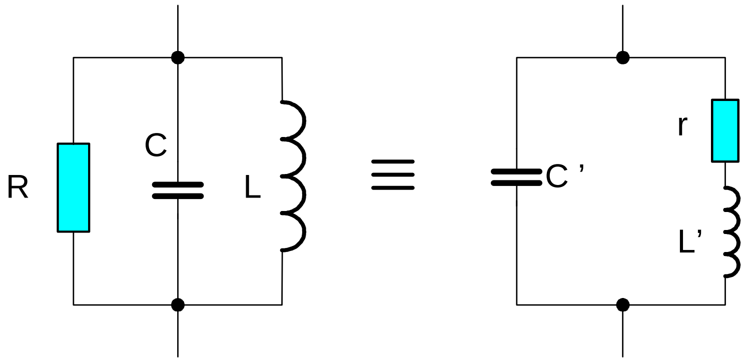
On considère un circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale :



- Déterminer l'impédance complexe Z du circuit
- En déduire le courant complexe I qui circule dans le circuit. Pour quelle valeur de ω, ce courant passe-t-il par un maximum ? En déduire la valeur de I_{max} et de Z_{max}. Tracer l'allure de I et de φ en fonction de ω pour plusieurs valeurs de R (R=0 que se passe-t-il ?).
- Dans ces conditions, déterminer les valeurs U_C et U_L des tensions aux bornes de la capacité et de l'inductance. En déduire la valeur du coefficient de surtension Q.
- En tenant compte de Q et en posant $x = \omega/\omega_0$, réécrire la valeur de l'impédance réduite Z/Z_{max} et de φ. Tracer l'allure de ces deux courbes et déterminer la bande passante ΔF (lorsque $Z/Z_{max} = 1/\sqrt{2}$).

AN : R=100Ω ; L=1mH ; C=1µF ; U_{eff}=100V

7. Circuit RLC parallèle ou circuit « bouchon »



On considère un circuit RLC parallèle (circuit de gauche) alimenté par une tension sinusoïdale :

- Déterminer et tracer l'allure de l'admittance complexe Y du circuit en fonction de ω.
- Pour quelle valeur de ω la courant dans le circuit devient-il maximal ? En déduire la valeur de I_{max} et de Z_{max}.
- Dans ces conditions, déterminer les valeurs I_C et I_L des courants circulant dans la capacité et dans l'inductance. En déduire la valeur du coefficient de surtension Q.

On considère un circuit L' en série avec sa résistance r (résistance du bobinage) le tout en parallèle avec une capacité C' (circuit de droite).

- Démontrer que l'on peut remplacer ce circuit par le circuit RLC précédemment étudié et déterminer les valeurs de R, L et C en fonction de L',C' et r.
- A la résonance ω_0, calculer la valeur de l'impédance et du facteur de surtension.
- Que deviennent ces valeurs lorsque l'on place une résistance R'=55kΩ en parallèle sur l'ensemble ?

AN : L'=100µH ; C'=30pF ; r = 30Ω