	ELECTRICITE - ELECa	TD N°4
Les dipôles en régime transitoire		J. BRESSON

1) RELATION COURANT TENSION

a) Résistance

La Loi d'Ohm donne : $V(t) = R.I(t)$ R en *Ohms* (Ω)

- **Inductance**

La loi de Lenz donne : $\boxed{V(t) = L\frac{di}{di} \quad \text{soit} \quad I(t) = \frac{1}{L}\int V(t)dt}$ L en *Henrys* (H)

- **Condensateur**

De $dQ(t) = CdV(t)$ et de $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$ on tire : $\boxed{I(t) = C\frac{dV(t)}{dt}}$ et $\boxed{V(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt}$ C en *Farads* (F)

2) DIPOLES PASSIFS LINEAIRES EN REGIME VARIABLE

Soit V(t) la tension de commande et y(t) la variable (tension, intensité, …) d'un des dipôles du circuit. On démontre qu'il existe une relation (équation différentielle) entre ces 2 paramètres où tous les coefficients a_i sont constants :

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + a_3 y''' + \ldots + a_n y^n = kV(t)$$

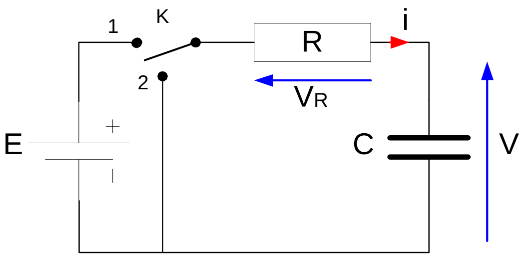
La solution de cette équation différentielle est de la forme : $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$
où :
- $y_1(t)$ est la **solution générale** sans second membre c-à-d correspondant au **régime libre** (ss excitation extérieure)
- $y_2(t)$ est une **solution particulière** avec second membre correspondant au **régime forcé** par la tension extérieure V(t)

Après le régime libre ou transitoire dont la durée est fonction des constante de tempsdu circuit, on obtient le régime forcé ou permanent.

Le système estdit du 1er ordre si l'équation différentielle est du 1er ordre, du 2ème ordre si elle est du 2ème ordre, … etc.

3) SYSTEME DU 1ER ORDRE

a) Charge et décharge d'un condensateur



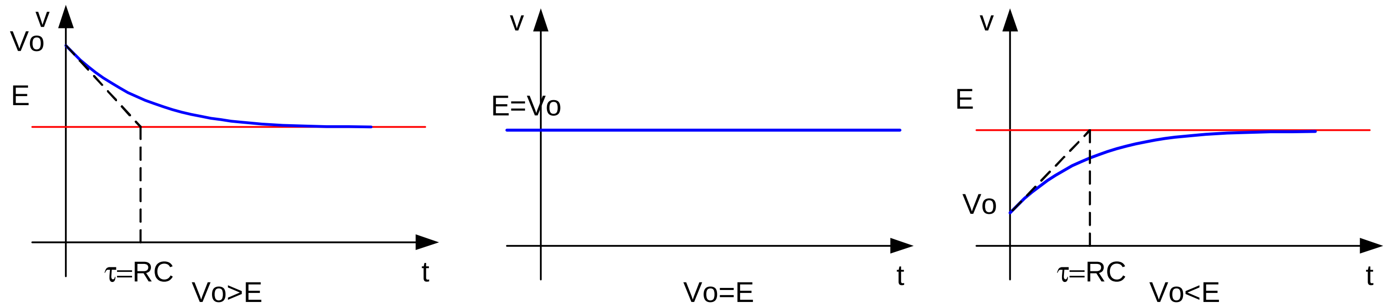
A l'instant t=0, v=Vo (charge initiale), on ferme l'interrupteur en position 1:

$E = Ri + v$

$i = C\frac{dv}{dt}$ on tire : $\boxed{v + RC\frac{dv}{dt} = E}$ équation diff. Du 1er ordre

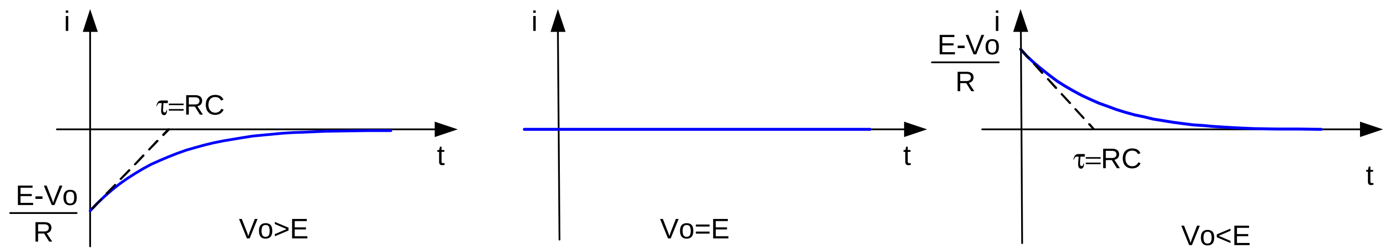
qui a pour solution générale (ss scd membre) : $v = ke^{-\frac{t}{RC}}$
et pour solution particulière : v=E

soit la solution générale : $v = E + ke^{-\frac{t}{RC}}$ où k=Vo-E (d'après les cond. Initiales) soit : $\boxed{v = E + (V_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}}}$ (1)



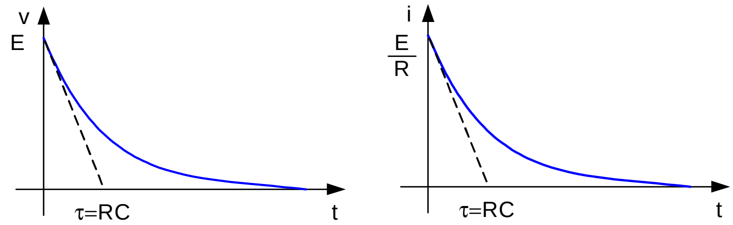
variation du courant i :

de la relation (1) et de $i = C\dfrac{dv}{dt}$ on tire $\boxed{i = \dfrac{E - V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$ ce qui donne les courbes suivantes



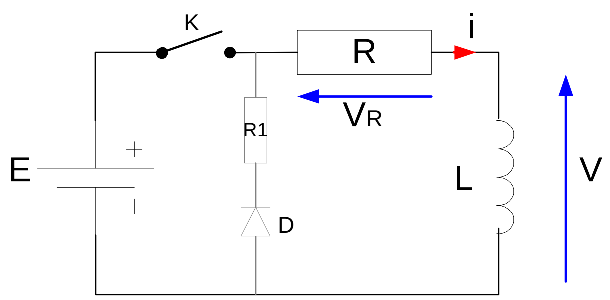
Lorsque v=E , on bascule l'interrupteur en position 2 : la capacité se décharge à travers la résistance et le courant s'inverse.

$\boxed{v = Ee^{-\frac{t}{RC}}}$ et $\boxed{i = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$



(amination java :http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Transitoire/Condensateur_flash.htm)

b) Etablissement et rupture de courant dans une inductance



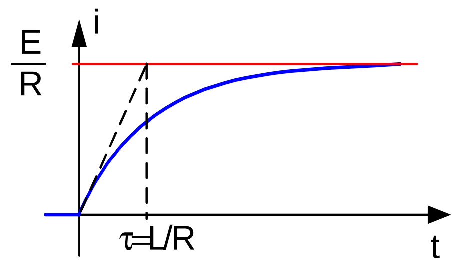
A l'instant t=0, on ferme l'interrupteur K

$E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ ou encore : $\boxed{i + \dfrac{L}{R}\dfrac{di}{dt} = \dfrac{E}{R}}$ équ. diff. similaire à celle du paragraphe précédent. La solution est :

$\boxed{i = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R}}$ constante de temps

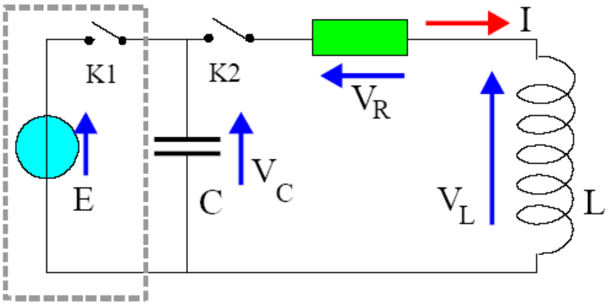
A l'ouverture de l'interrupteur K, il apparaît 2 exigences contradictoires :

- Celle qui veut faire passer instantanément le courant i de E/R à 0,
- Celle de l'inductance qui ne tolère aucune variation brutale du courant i qui la traverse



En définitive, c'est l'inductance qui l'emporte en provoquant aux bornes de l'interrupteur une surtention avec apparition d'un arc électrique de façon à maintenir le circuit fermé (alors que l'inter. est ouvert !!). Il est donc utile d'adjoindre une résistance R1 en série avec une diode D (**circuit de roue libre**) de façon à prolonger le circuit afin de décharger l'inductance.

4) SYSTEME DU 2ème ORDRE



Le condensateur C est d'abord chargé (K1 fermé) à la valeur E. Donc $q_0 = CE$, ensuite K1 est ouvert et K2 fermé, de la loi des maille : $-V_C+V_R+V_L=0$ .On obtient l'équation différentielle suivante :

$-\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$ sachant que $i = -\frac{dq}{dt}$ (le condensateur se décharge), il vient : $\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0}$ si on pose :

$LC\omega_0^2 = 1; \quad \lambda = \frac{R}{2L}; \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}; \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$

où Q est le facteur de qualité et λ le facteur d'amortissement.

L'équation devient : $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{dq}{dt} + \omega_0^2.q = 0}$ d'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}.r + \omega_0^2 = 0$

qui donne 2 racines $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\alpha} = -\lambda \pm \sqrt{\alpha}$

La solution générale de l'équation est de la forme : $\boxed{q(t) = A_1e^{r1t} + A_2e^{r2t} = e^{-\lambda t}(A_1e^{\sqrt{\alpha}t} + A_2e^{-\sqrt{\alpha}t})}$

La constante de temps est : $\tau = 1/\lambda = 2L/R$ et **selon le signe de α, la nature des solutions diffère.**

a) **α>0** soit $Q < 1/2$ ou $R > 2\sqrt{L/C}$ **(ammortissement fort)**

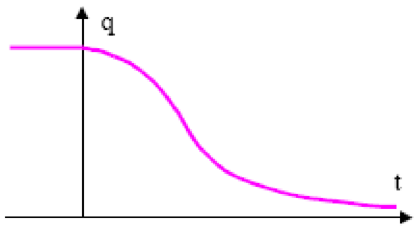
Les racines sont réelles, on pose $\Omega = \sqrt{\alpha} = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

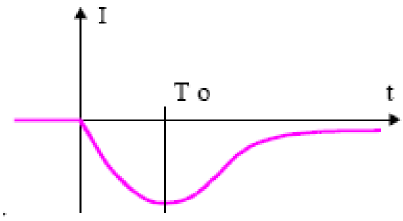
Des conditions initiales q(t=0)=qo et i(t=0)=0 on tire qo=A_1+A_2 et $r_1A_1=r_2A_2$

La solution générale devient : $\boxed{q(t) = \frac{q_0}{2\Omega}e^{-\lambda t}\left[(\lambda+\Omega).e^{\Omega t} + (-\lambda+\Omega).e^{-\Omega t}\right]}$

comme $\Omega^2 - \lambda^2 = \alpha - \lambda^2 = -\omega_0^2$

le courant I(t) s'écrit : $\boxed{I(t) = -\frac{q_0\omega_0^2}{2\Omega}e^{-\lambda t}\left[e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}\right]}$





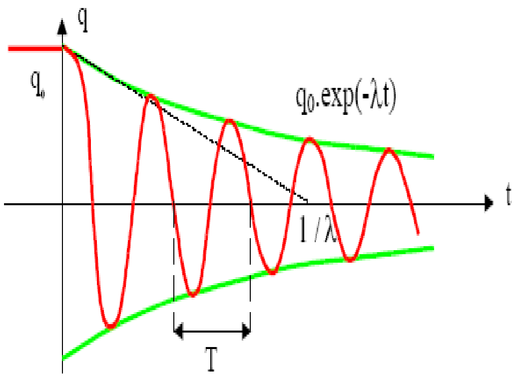
Ce régime de fonctionnement est le **régime apériodique**. Le système revient à son état initial (q=0, i=0) **sans oscillations**.

b) **α=0** soit Q=1/2 **ou** $R = 2\sqrt{L/C}$ **(ammortissement critique)**

il y a une racine double $r = -\lambda$, la solution est de la forme : $\boxed{q(t) = (A_1 + A_2).e^{rt}}$ régime **apériodique et critique** (courbe même allure que précedemment).

c) **α<0** soit $Q > 1/2$ ou $R < 2\sqrt{L/C}$ **(ammortissement faible)**

On pose $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$, les 2 racines sont imaginaires conjuguées et valent : $r_{12} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\omega$



Toujours avec les mêmes conditions q(t=0)=qo et i(t=0)=0, on obtient :

$\boxed{q(t) = \frac{q_0}{2j\Omega}e^{-\lambda t}\left[(\lambda + j\omega).e^{j\omega t} + (-\lambda + j\omega).e^{-j\omega t}\right]}$

En posant $tg\varphi = \lambda/\omega$ et $\cos\varphi = \omega/\omega_0$ la relation précédente se transforme en : $\boxed{q(t) = q_0\frac{\omega_0}{\omega}e^{-\lambda t}\cos(\omega t - \varphi)}$

On obtient un régime **oscillant amorti « pseudopériodique »** caractérisé par une pseudopériode $T = 2\pi/\omega$ et par le terme amortissement $\lambda = \frac{R}{2L}$.

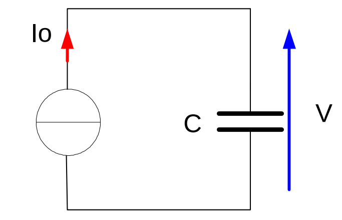
(animation java : http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Transitoire/Condensateur1_flash.htm)

IUT Perpignan	ELECTRICITE - ELECa	TD N°4

Les dipôles en régime transitoire	J. BRESSON

EXERCICES

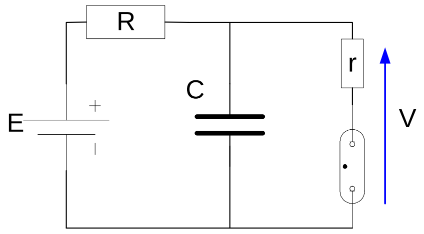
1. Charge d'une capacité à courant constant



On charge une capacité à l'aide d'un générateur de courant constant.

Si à l'instant t=0 la tension aux bornes de la capacité vaut Vo, déterminer la tension V aux bornes de la capacité.
Tracer l'évolution de cette tension. Conclusion ?

2. Relaxateur à Néon



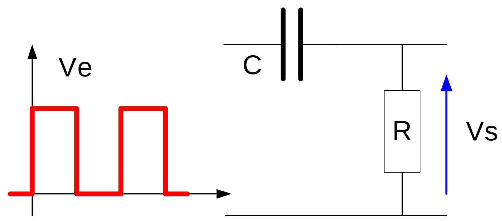
On considère le circuit ci-contre. Le fonctionnement de la lampe néon peut être schématisé de la manière suivante ; si la tension aux bornes de la lampe est inférieure à V_{AL}, elle est éteinte et présente une résistance r_E très grande. Quand le tube est allumé, le gaz ionisé présente une résistance r_A. Quand la tension aux bornes du tube devient inférieure à V_{EX}, il s'éteint.

Déterminer la variation de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.

AN : E=90V ; R=1MΩ ; C=10µF ; V_{AL}=65V ; V_{EX}=55V ; rA=10^5Ω

(animation java :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Transitoire/neon_flash.html)

3. Circuit intégrateur



On suppose que l'impédance de charge du circuit est très grande.. La tension d'entrée est carré. Déterminer l'allure de la tension de sortie.