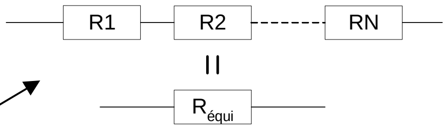
IUT Perpignan	ELECTRICITE - ELECa	TD N°3

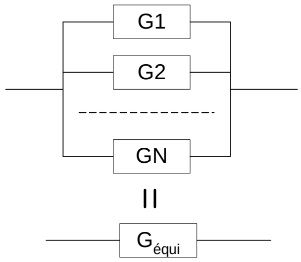
Les réseaux linéaires : les différents théorèmes	J. BRESSON

1. ASSOCIATION DE RESISTANCES

1.1. Résistances en série



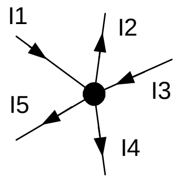
$$R_{équi} = \sum_{i=1}^{N} Ri$$



1.2. Résistances en parallèles

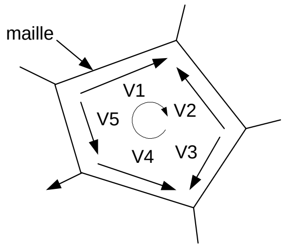
$$G_{équi} = \sum_{i=1}^{N} Gi \quad \text{avec} \quad G = \frac{1}{R} \text{ conductance}$$

2. LOI DE KIRCHHOFF



Aux nœuds d'un circuit, il y a conservation du courant électrique.
Ainsi : $I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5$

Loi des nœuds : $\sum_n I_n = 0$



Dans un circuit fermé (maille), la somme des différences de potentiels est nulle.
Ainsi : $-V_1 + V_2 - V_3 + V_4 + V_5 = 0$

Loi des mailles : $\sum_n V_n = 0$

2.1. La méthode des mailles

La méthode consiste à faire le choix (arbitraire) d'un sens de parcours sur la maille étudiée et à choisir pour chaque branche un sens pour le courant. La f.e.m. d'un générateur est comptée avec le signe de la borne par laquelle on entre dans celui-ci. Les d.d.p. aux bornes des résistances sont positives (+) si le courant dans la branche a même sens que le sens de parcours et négatives (-) dans le cas contraire.
On, écrit que la somme des tensions est nulle.
Si à l'issue du calcul, on obtient un courant de branche négatif, c'est que le courant réel dans cette branche est dans le sens opposé à celui qui a été choisi.

On obtient ainsi un système linéaire de N équations à N inconnues :

$$R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + ... + R_{1N}I_N = V_1$$
$$R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + ... + R_{2N}I_N = V_2$$
....
$$R_{N1}I_1 + R_{N2}I_2 + ... + R_{NN}I_N = V_N$$

qui peut s'écrire sous la forme : $[R].[I] = [V]$

La résolution du système peut s'effectué de plusieurs façons :

- Par inversion de matrice : $[I] = [R]^{-1}[V] = [G].[V]$ et la valeur du courant dans la branche j : $\boxed{I_j = \sum_{i=1}^{N} G_j^i V_i}$
- Par la méthode de Kramer. Si Δ est la déterminant de la matrice [R], Δj le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la j^e colonne de [R] par la colonne [V], on a $\boxed{I_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}$
- Dès que N >3, on privilégiera des méthodes de simplification de réseaux.

b) La méthodes des nœuds

La méthode des nœuds procède d'une démarche similaire. Elle consiste à faire le choix (arbitraire) des sens de courant à chacun des noeuds étudiés et à choisir pour chaque branche un sens pour la tension. En chacun des nœuds, on écrit que la somme des courants est nulle.
Si à l'issue du calcul, on obtient une tension de branche négative, c'est que la tension réelle dans cette branche est dans le sens opposé à celle qui a été choisie.

On obtient ainsi un système linéaire de N équations à N inconnues :

$$G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + ... + G_{1N}V_N = I_1$$
$$G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + ... + G_{2N}V_N = I_2$$
$$........$$
$$G_{N1}V_1 + G_{N2}V_2 + ... + G_{NN}V_N = I_N$$

qui peut s'écrire sous la forme : $[G].[V] = [I]$

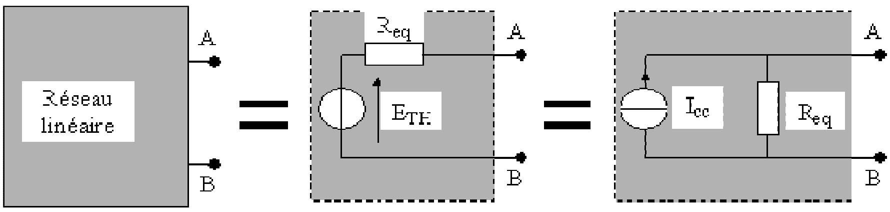
La résolution du système peut s'effectué comme précédemment.

3. THEOREME DE SUPERPOSITION

Dans un réseau linéaire, le courant (ou la tension) dans une branche quelconque est égal à la **somme algébrique** des courants (ou des tensions) obtenus dans cette branche sous l'effet de chacune des **sources indépendantes** prise isolément, toutes les autres ayant été remplacées par leur **résistance interne**

4. THEOREME DE THEVENIN-NORTON

Tout dipôle linéaire peut être modélisé par un dipôle équivalent de Thévenin ou par un dipôle équivalent de Norton :



Eth : est la tension vue entre les deux bornes du dipôle est à vide. (réseau linéaire non relié à un autre réseau électrique).

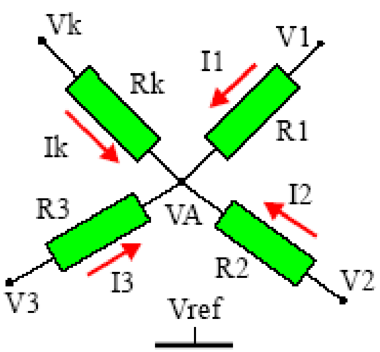
Icc : est le courant de court-circuit entre les deux bornes de ce dipôle.

Req : est la résistance vue entre les deux bornes du dipôle lorsque toutes les sources **indépendantes** sont remplacées par leur résistance interne.

Les modèles de Thévenin et de Norton sont reliés par la relation : $I_{cc} = \dfrac{E_{TH}}{R_{eq}}$

5. THEOREMES DECOULANT DES THEOREMES PRECEDENTS (Connaissance facultative)

5.1. THEOREME DE MILLMAN



Au nœud A : I1+I2+…+Ik=0

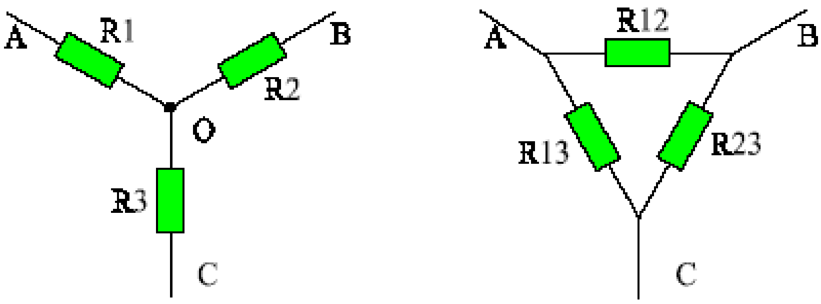
$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + .. + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

Soit : $(V_1 - V_A)G_1 + (V_2 - V_A)G_2 + ... + (V_k - V_A)G_k = 0$

$$V_A \sum G_i = \sum V_i G_i$$

Soit enfin : $\boxed{V_A = \dfrac{\sum_i G_i V_i}{\sum_i G_i}}$ relation plus connue sous le nom de théorème de Millman

5.2. THEOREME DE KENNELY

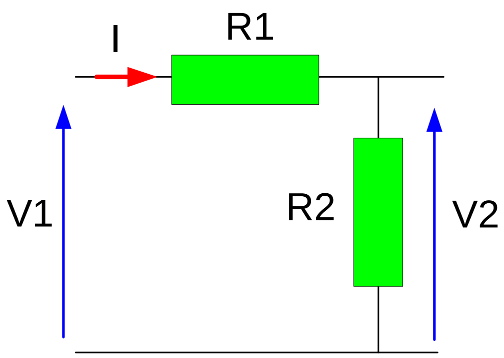


$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$
$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$
$$R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

$$R_{12} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3}$$
$$R_{23} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1}$$
$$R_{13} = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2}$$

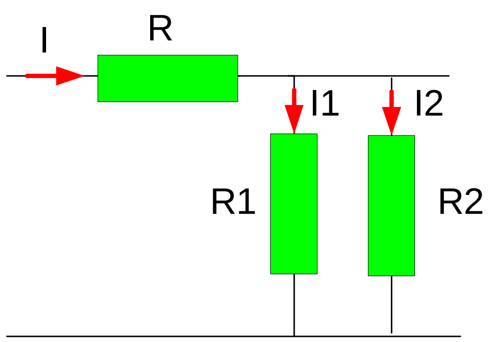
5.3. THEOREME DU PONT DIVISEUR

5.3.1. Pont diviseur de tension



$$\boxed{V2 = \frac{R2}{R1+R2}V1}$$

5.3.2. Pont diviseur de courant



$$\boxed{I1 = \frac{R2}{R1+R2}I}$$

Et : $\boxed{I2 = \dfrac{R1}{R1+R2}I}$

IUT Perpignan	ELECTRICITE - ELECa	TD N°3

Les réseaux	J. BRESSON

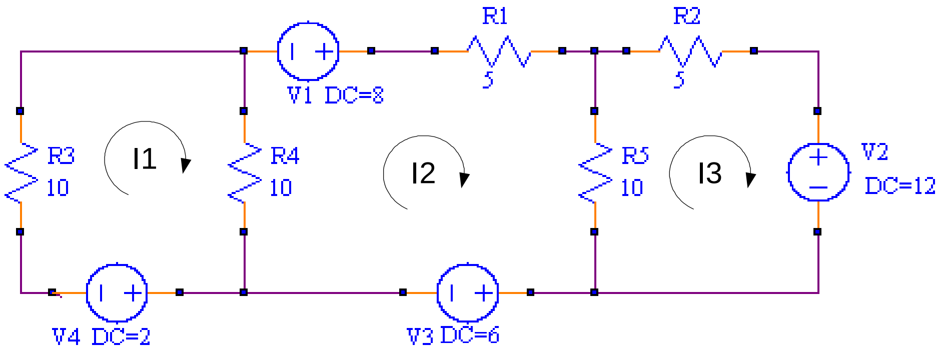
EXERCICES

1) LOI DE KIRCHHOFF

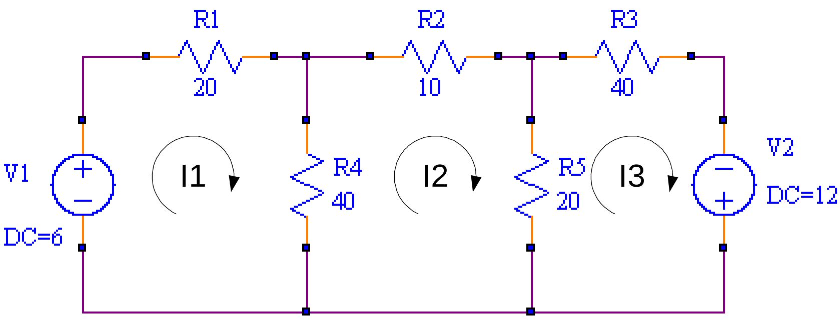
a) La méthode des mailles

Calculer l'intensité dans chacune des branches de ces 2 circuits par la méthode de Kramer :

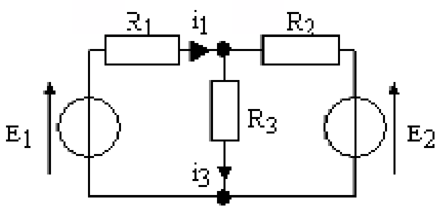
Exercice 1 :



Exercice 2 :



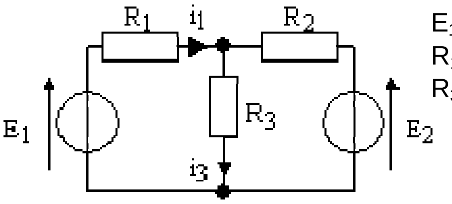
2) THEOREME DE MILLMAN



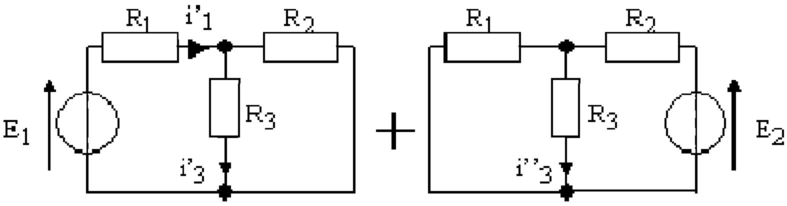
Calculer la tension aux bornes de R3 ainsi que le courant i_3 qui la traverse.

On donne E_1=10V, E_2=5V
R1=15Ω ,R2=10Ω , R3=5Ω

3) THEOREME DE SUPERPOSITION



$E_1 = 10$ V, $E_2 = 5$ V
$R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ et
$R_3 = 5\ \Omega$



On veut exprimer i_3, en fonction de E_1, E_2, R_1, R_2, et R_3.

Pour ce faire, on utilisera le théorème de superposition :

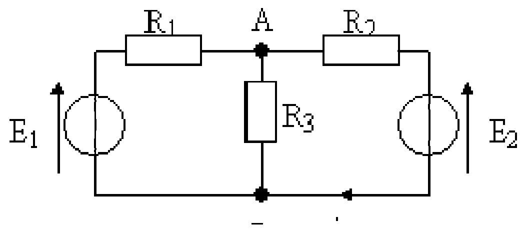
- Calculer i'_1.
- En déduire i'_3 par la formule du pont diviseur de courant.
- Procéder de même pour calculer i''_3.
- En utilisant le théorème de superposition, en déduire la valeur de i_3

4) THEOREME DE THEVENIN-NORTON

a) exercice 1

On veut exprimer le courant i_2 en fonction des éléments du montage. Pour ce faire, on peut remplacer tout le montage par un schéma plus simple, **sauf la branche qui contient i_2** :

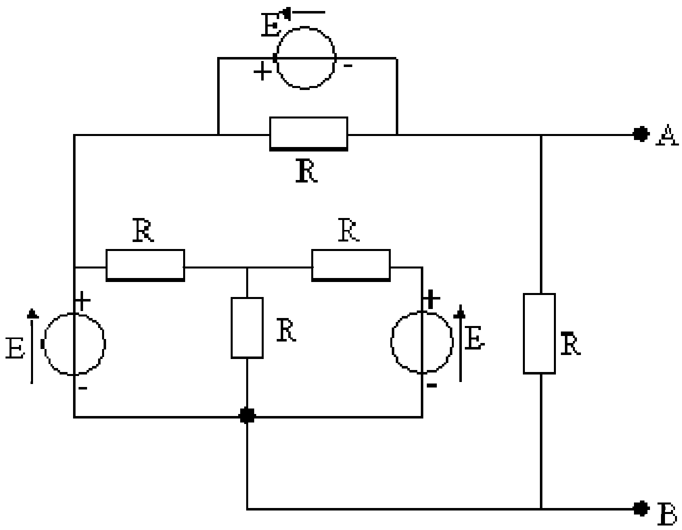
- Calculer le schéma équivalent de Thévenin du dipôle AB (constitué de E_1, R_1 et R_3). (Penser au pont diviseur de tension...).
- Après avoir remplacé E_1, R_1 et R_3 par ce dipôle équivalent, en déduire la valeur de i_2 par la loi des mailles.



$E_1 = 10$ V, $E_2 = 5$ V

$R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ et $R_3 = 5\ \Omega$

b) exercice 2 - Problème de méthode



Pour le schéma ci-contre, déterminer par application du théorème de THEVENIN, le dipôle équivalent entre les bornes A et B.

Repérer les dipôles en série et les remplacer par leur schéma équivalent de Thévenin.

Le résultat demandé s'obtient alors sans aucun calcul …

c) exercice 3 – Problème de méthode

Utiliser la dualité Thévenin/Norton. Gagner en rapidité en utilisant directement des valeurs numériques.

En utilisant le théorème de Thévenin, calculer le courant dans la résistance R.

On donne:

$E_1 = 3$ V. $R_1 = R_2 = R_3 = 2\ \Omega$.
$E_2 = 1$ V. $R = 5\ \Omega$.
$E_3 = 2$ V.